ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101098437485

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ЯКИМОВ

Имя МАКСИМ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 20 08 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 325

Телефон 89044877806

Дата 05 02 2024 **Подпись** Якимов

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101098437485

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс
- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 01 Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	20	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	20	0					

Итоговый балл 80

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№ 1

1) пусть $S = 1+2+3+4+\ldots+36 = \frac{37\cdot 36}{2} = 37\cdot 18.$

Тогда чтобы 6 сумм по горизонтали и 6 по вертикали в некотором порядке являлись 12 последовательными числами, нужно чтобы в каждом ряду и строке были разные суммы $\Rightarrow$ 6 сумм по горизонтали $= S$; 6 сумм по вертикали $= S$, тогда всего если сложить все 12 сумм, получим число $=$ $= 2\cdot S = 37\cdot 18\cdot 2 = \underline{6\cdot 37\cdot 6}$

2) по условиям сумму 12 сумм можно представить в виде суммы арифметической прогрессии, в которой 12 последовательных чисел, т. е:

$$6\cdot 37\cdot 6 = \underbrace{a_1 + (a_1+1) + (a_1+2) + (a_1+3) + \ldots + (a_1+11)}_{\text{всего 12 чисел}}$$

$$6\cdot 37\cdot 6 = \frac{(2a_1+11)\cdot 12}{2}$$

$$6\cdot 37\cdot 6 = 12a_1 + 66 \quad |:6$$

$$37\cdot 6 = 2a_1 + 11$$

$$11 = 37\cdot 6 - 2a_1$$

$$\underbrace{11}_{\not\vdots 2} = \underbrace{\underbrace{2}_{\vdots 2}\cdot(37\cdot 3 - a_1)}_{\vdots 2}$$ – чего быть не может, т. к. $a_1 \in \mathbb{N}$, левая часть $\not\vdots 2$, а правая $\vdots 2$.

3) из п. 1) и п. 2) следует, что расставить числа согласно условиям нельзя.

Ответ: нельзя

+

$\boxed{№ 2}$

1) a, b, c – положительные $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ справедливо следующее:

$$(1-\sqrt{abc})^2 \geq 0$$

$$1 + abc - 2\sqrt{abc} \geq 0$$

$$\underline{1 + abc \geq 2\sqrt{abc}}$$

2) из условий $a^2+b^2+c^2+2abc = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2+c^2 = 1 - a^2 - 2abc \\ c^2+a^2 = 1-b^2-2abc \\ a^2+b^2 = 1-c^2-2abc \end{cases}$$

также: $a^2+b^2+c^2 = 1 - 2abc$

3) $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$

$$a\sqrt{1+b^2c^2-(b^2+c^2)} + b\sqrt{1+a^2c^2-(a^2+c^2)} + c\sqrt{1+a^2b^2-(a^2+b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$$

$$a\sqrt{1+b^2c^2-1+a^2+2abc} + b\sqrt{1+a^2c^2-1+b^2+2abc} + c\sqrt{1+a^2b^2-1+c^2+2abc} \geq 2\sqrt{abc}$$

$$a\sqrt{(bc)^2+2\cdot a\cdot bc+a^2} + b\sqrt{(ac)^2+2\cdot b\cdot ac+b^2} + c\sqrt{(ab)^2+2\cdot c\cdot ab+c^2} \geq 2\sqrt{abc}$$

$$a\sqrt{(bc+a)^2} + b\sqrt{(ac+b)^2} + c\sqrt{(ab+c)^2} \geq 2\sqrt{abc}$$

$$a\cdot(bc+a) + b\cdot(ac+b) + c(ab+c) \geq 2\sqrt{abc}$$

$$abc+a^2+abc+b^2+abc+c^2 \geq 2\sqrt{abc}$$

$$(a^2+b^2+c^2) + 3abc \geq 2\sqrt{abc}$$

$$1-2abc+3abc \geq 2\sqrt{abc}$$

$\underline{1 + abc \geq 2\sqrt{abc}}$ – что всегда верно, доказано в п. 1) $\Rightarrow$

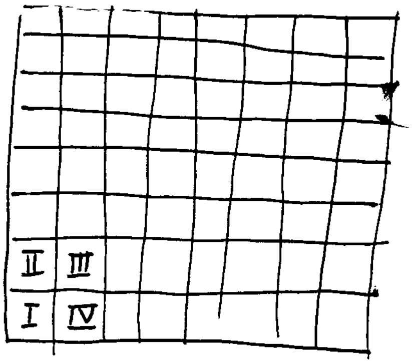
$\Rightarrow$ исходное неравенство ~~так~~ всегда выполняется

что и требовалось доказать

Бланк ответов

$\boxed{№ 4}$ (часть 1, продолжение прошл. стр.)

1) не умаляя общности рассмотрим нижний левый край доски; а именно клетки I, II, III, IV



• во-первых одна фигура оборотень не может покрывать сразу ≥2 из этих четырёх клеток, т.к. все эти клетки стоят рядом либо по стороне, либо по вершине.

• рассмотрим клетку $\boxed{I}$, любая фигура оборотень, которая бьёт эту клетку – бьёт ≤ 4 клеток, т.к. в любом случае, одно из битых полей фигуры будет находиться за пределами доски.

• рассмотрим клетки $\boxed{II}$ и $\boxed{IV}$ – для них также, аналогично $\boxed{I}$, любая фигура будет бить ≤4 клеток, т.к. фигура оборотень бьёт через одну по всем сторонам и свою клетку.

• рассмотрим клетку $\boxed{III}$, хоть она стоит ближе к центру, но ~~она также~~ для неё также фигура оборотень бьёт ≤ 4 клеток, т.к. $\boxed{III}$ находится на расстоянии лишь одной клетки от границ поля.

2) аналогично п. 1) работает для всех углов доски, 2 клетки, находящиеся в разных углах фигура оборотень также не может бить, т.к. между ними расстояние ≥ 4 пустых клеток, а ~~фигура~~ одна фигура может бить лишь клетки, находящиеся на расстоянии ≤ 3 пустых клеток

3) таким образом из п. 1) и п. 2) следует, что для ≥ 4·4=16 ~~клеток нужна отдельная фигура, которая~~ клеток нужна отдельная фигура. (причём все эти фигуры бьют по ≤ 4 клетки). Т.е. кол-во оборотней ≥ 16.

№4 (продолжение)

4) пример на 16 оборотней, ~~цифра~~ номер в кружочке обозначает поле, где стоит оборотень, ~~цифра~~ номер соответствует номеру оборотня, ~~цифра~~ номер без кружочка обозначает поле, которое бьёт оборотень с этим номером.

9	8	9	8	9	8	15	10
14	2	14	2	14	2	3	5
7	1	9	8	15	10	15	10
12	13	14	2	3	5	3	5
7	1	7	1	4	16	15	10
12	13	12	13	6	11	3	5
7	1	4	16	4	16	4	16
12	13	6	11	6	11	6	11

5) в п. 1) - 3) доказано, что кол-во оборотней ≥ 16, в п. 4) показан пример на 16 оборотней $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ наименьшее кол-во оборотней $= 16$

+

Ответ: наименьшее кол-во оборотней $= 16$

Бланк ответов

$\boxed{№ 3}$ (часть 1, продолжение на сл. стр.)

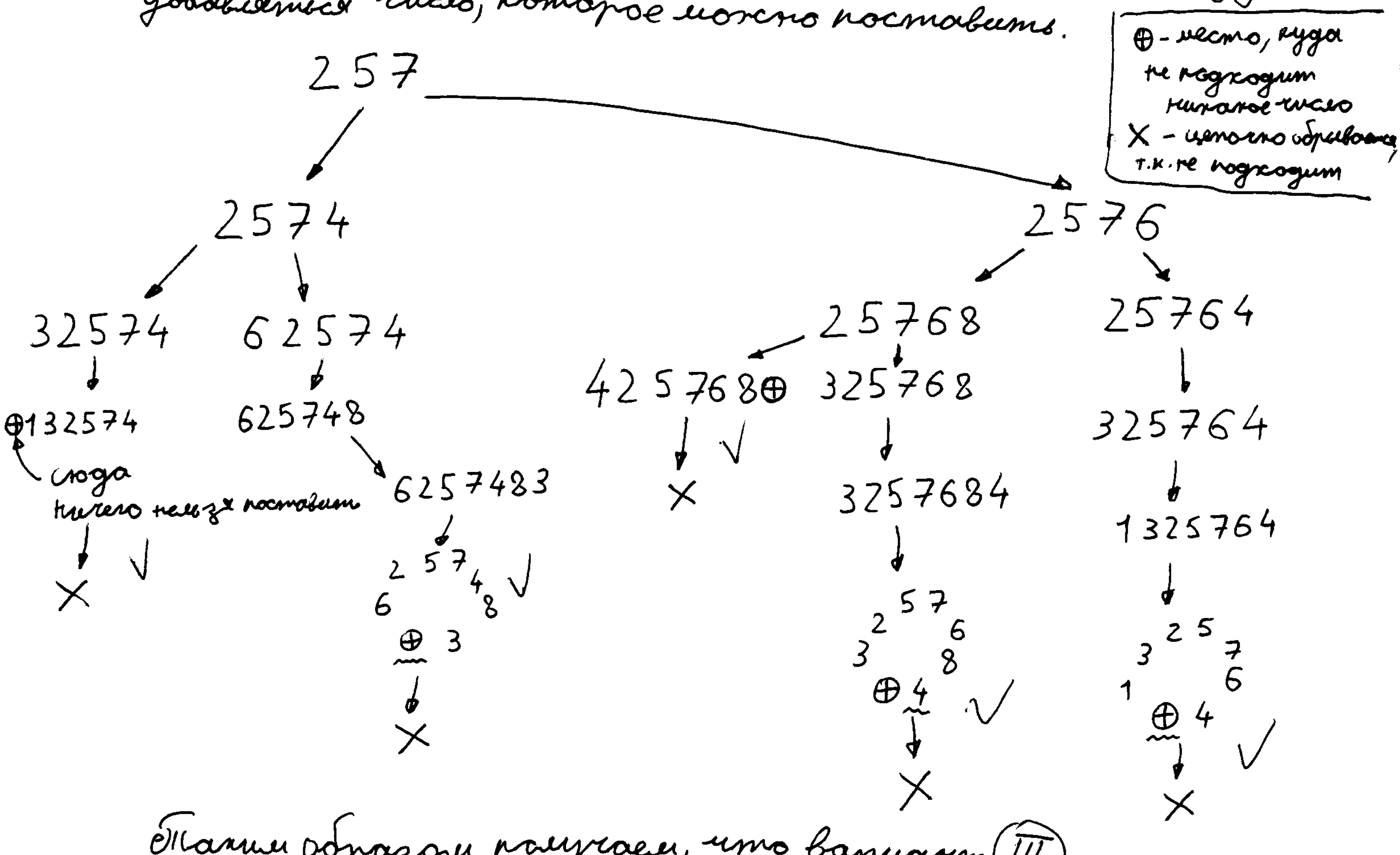
1) ~~пуст~~ в круге есть ряд $\underline{2}\ \underline{5}\ \underline{x_1}$, по условию,

т.к $5 \vdots 5$ и $5 \vdots 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |2 - x_1| = 5 \\ |2 - x_1| = 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_1 = 1 \\ x_1 = 3 \end{array}\right. \quad 1 \le x_1 \le 8$

Следовательно возможно 3 случая:

I 251   II 253   III 257

2) аналогично ~~уел~~ рассуждениям из п. 1) и условиям, ~~особенно~~ в частности тому, что числа не повторяются рассмотрим случай III в виде дерева, где на каждом уровне будет добавляться число, которое можно поставить.

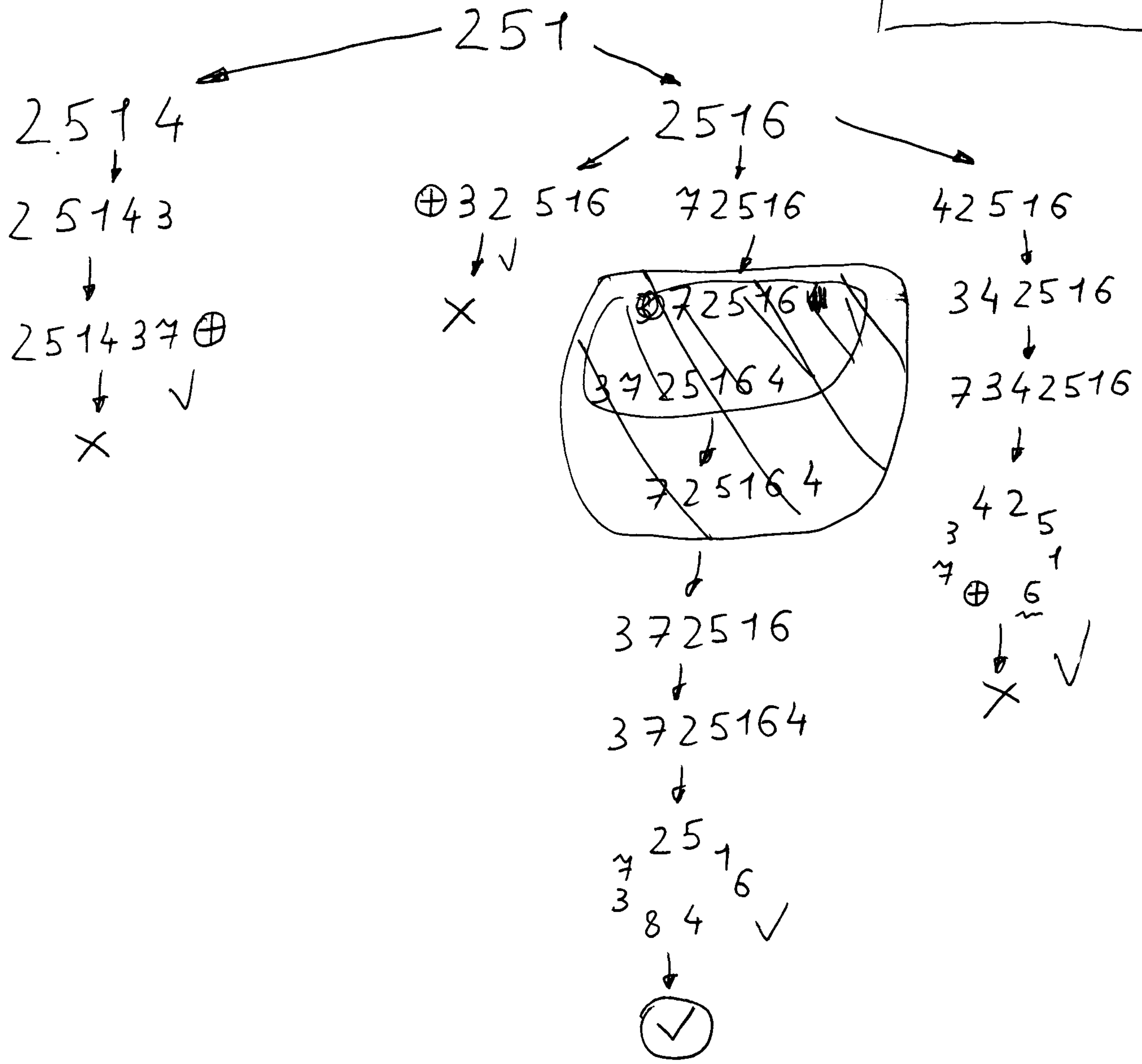


Таким образом получаем, что вариант III не подходит.

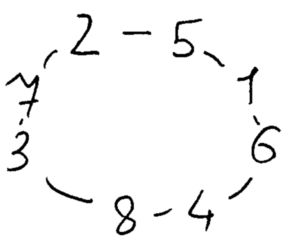
№3 (часть 2, продолжение на сл. стр.)

3) аналогично рассуждениям из п. 1) и условиям, в частности тому, что числа не повторяются, построим дерево подобно п. 2), рассматривая случай (I):

✓ - подходит

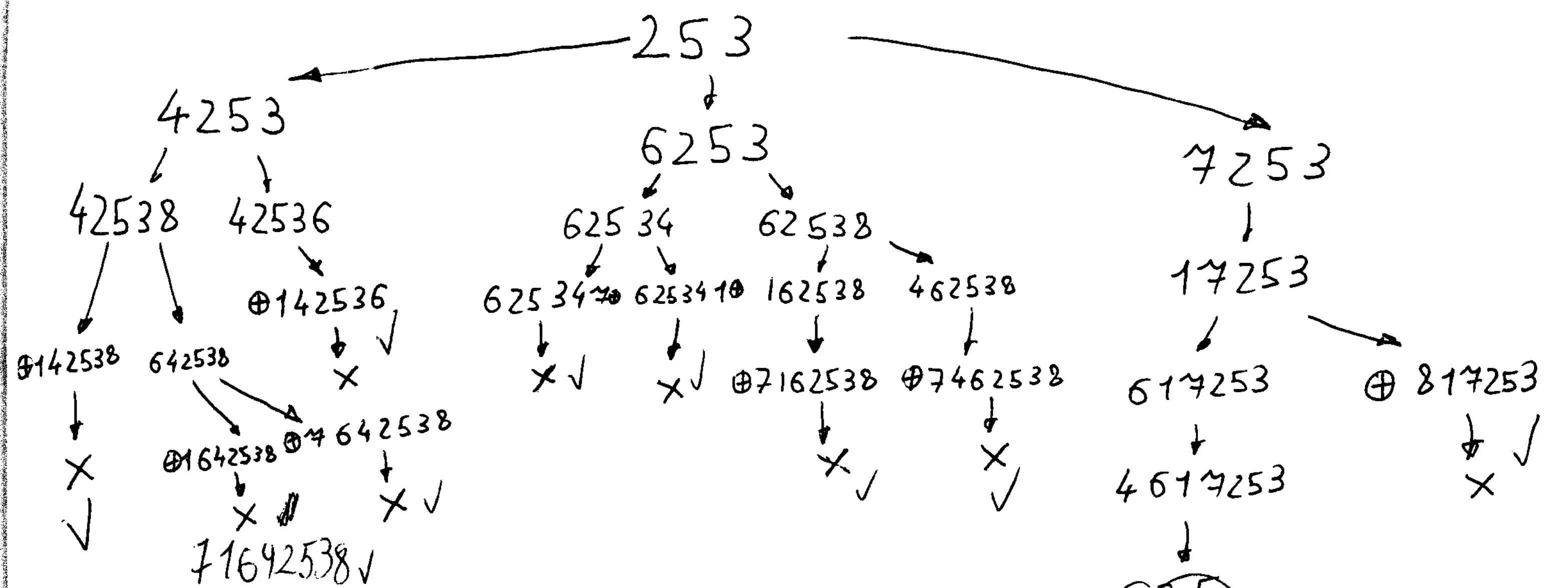


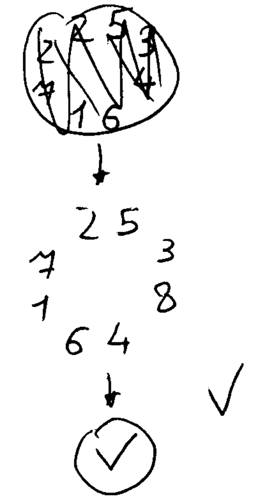
Таким образом получаем, что для варианта (I) подходит 1 пример:



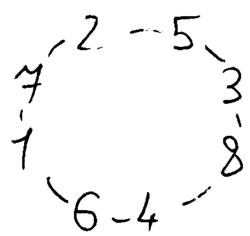
№3 (часть 3)

Аналогично рассуждениям из п. 1) и условиям, в частности тому, что числа не повторяются, построим дерево подобно п. 2), рассматривая случай (II):





Таким образом получаем, что для варианта (I) подходит 1 пример:



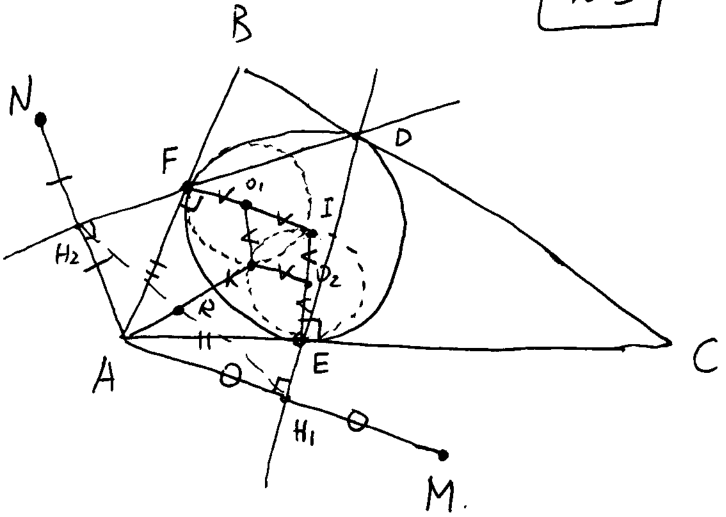
5) итого из п. 1) – п. 4) следует, что мы перебрали все возможные случаи и нам подошло лишь 2 примера, которые соответствуют условиям:

в обоих вариантах 4 и 6 стоят рядом ⇒ ⇒ мы доказали, что возможно лишь 2 примера и в обоих 4 и 6 рядом ⇒ мы доказали, что 4 и 6 всегда стоят рядом

что и требовалось доказать ☒

+

№5



1) $AE = AF$ – касательные,

O_1 – центр окр. с диаметром IF

O_2 – центр окр. с диаметром IE, тогда $O_1I = IO_2 = O_2K = KO_2$ – – радиусы этих окружностей

2) $\triangle AH_2H \sim \triangle ANM$ из-за построения, $NH_2 = H_2A$, $AH_1 = H_1M$

3) построим H_2K и KH_1, тогда $H_2A \parallel H_1K$, $H_2K \parallel H_1A \Rightarrow$ не доказано

$\Rightarrow H_2KH_1A$ – параллелограмм $\Rightarrow$ диагонали делятся пополам, т. Е $AR = RK$.

4) тогда из п. 3) ~~да~~ ~~угл~~ ~~т.~~ т.к. $\triangle AH_2H \sim \triangle ANM = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AR : AK = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ~~K не~~ если R лежит на H_2H, то K лежит на NM $\Rightarrow K \in NM$

что и требовалось доказать