ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101337555116

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия ВИНОГРАДОВ

Имя СЕМЁН

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 28 07 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И-405

Телефон +79221921774

Дата 05 02 2024 **Подпись** Вин

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101337555116

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	3	–	0					
Балл члена жюри №2	20	20	3	–	0					

Итоговый балл 43

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№2

Докажем что для всех $n \leq 2023$, $a_n = n^2 a_1$ ~~по индукции.~~

~~$n=1$ $a_1 = 1^2 a_1$, очевидно.~~

~~Пусть для всех $n \leq k$ это верно,~~

~~тогда $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots \sqrt{a_k} = \sqrt{a_1} + 2\sqrt{a_1} + \ldots + k\sqrt{a_k}$,~~

~~и по условию $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots \sqrt{a_k} = \sqrt{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots k a_k}$~~

Пусть это верно для $\forall n \leq k$. тогда

$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots \sqrt{a_k} = \sqrt{a_1} + 2\sqrt{a_2} + \ldots + k\sqrt{a_k}$, и $\sqrt{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots k a_k} =$

$= \sqrt{a_1 + 2^3 a_1 + 3^3 a_1 + \ldots + k^3 a_1} = \sqrt{a_1 (1^3 + 2^3 + \ldots + k^3)}$.

$\sqrt{a_1} + 2\sqrt{a_1} + \ldots + k\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1} \cdot \frac{k(k+1)}{2}$.

Докажем что $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, по индукции

$n = 1$, $1^3 = \frac{1^2(2^2)}{4}$, очевидно

$n > 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = n^3 + \frac{(n-1)^2(n)^2}{4} = \frac{4n^3 + (n-1)^2(n)^2}{4} =$

$= \frac{n^2}{4} \cdot ((n-1)^2 + 4n) = \frac{n^2(n^2 - 2n + 1 + 4n)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ч.т.д. +

Тогда $\sqrt{a_1 + 2^3 a_1 + \ldots + k^3 a_1} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{\frac{k^2(k+1)^2}{4}} = \sqrt{a_1} \cdot \frac{k(k+1)}{2}$

~~Пусть n_1 – минимальное~~

$\frac{k(k+1)}{2}\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{k+1}} = \sqrt{a_1 \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)a_{k+1}}$

$\frac{k^2(k+1)^2}{4} a_1 + a_{k+1} + 2\sqrt{a_1 a_{k+1}} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = a_1 \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)a_{k+1}$ +

$-a_{k+1}(1-(k+1)) = \sqrt{a_1 a_{k+1}} \cdot k(k+1)$?

$a_{k+1}^2 \cdot \cancel{k^2} = a_1 a_{k+1} \cancel{k^2}(k+1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_{k+1} = 0 \\ a_{k+1} = a_1 (k+1)^2 \end{array}\right.$

~~$a_{k+1} > 0 \Rightarrow a_{k+1} = a_1$~~

$a_{k+1} > 0 \Rightarrow a_{k+1} = a_1 \cdot (k+1)^2$, ч.т.д.

$a_{2023} = a_1 \cdot 2023^2 \Rightarrow \frac{a_{2023}}{a_1} = 2023^2 = 4092529$

№1

Пусть S_1 – расстояние ~~которое~~ от Мурома до места встречи, а S_2 – расстояние от Киева до места встречи, v_1 – скорость Ильи, v_2 – скорость Катасьи, тогда

$$\frac{S_1}{v_1} = \frac{S_2}{v_2} \qquad S_1 - S_2 = v_2 \cdot 6ч$$

Пусть t – искомое время, ~~тогда~~

$$S_2 = t \cdot v_1 = v_1$$

Откуда переход?

$$t = \frac{S_2}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{t+6}{t} \Rightarrow t^2 = t+6$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ 3 \end{array}\right.$$

$$t > 0 \Rightarrow t = 3ч$$

Ответ: $t = 3ч$.

№3

Пусть $\overline{abcd}$ – исходная сумма, $\overline{eeef}$ – после 1-й покупки, $\overline{ghhh}$ – после 2-й. a, b, c, d, e, f, g, h – однозначно задаются через e, f. $\overline{abcd} - 229 = \overline{eeef} = \overline{ghhh} + 229$

$e \geq g$,
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} e = g \\ \overline{eef} \geq 229 \\ h \leq 6 \\ e \geq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} e = g+1 \\ \overline{eef} < 229, \; e \leq 2 \\ h \geq 8 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \left.\begin{cases} f+1 = h & 6 \geq h \geq 1, \; f \leq g \\ e = h+3 & e \geq 4, \; g = e \\ & e = f+4 \end{cases}\right\} A \\ \begin{cases} f - g = h, & f = g, \; h = 0 \\ e = h+2, & e = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \overline{efff} = 2229$

$\overline{ghhh} = 2000$

$\overline{abcd} = 2458$

Переберем все подходящие под A варианты e:

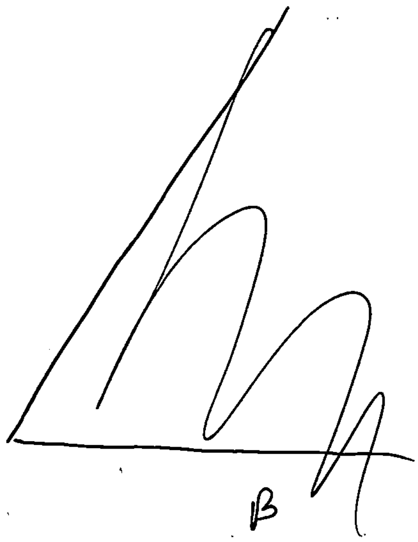
4111 + 229 = ?

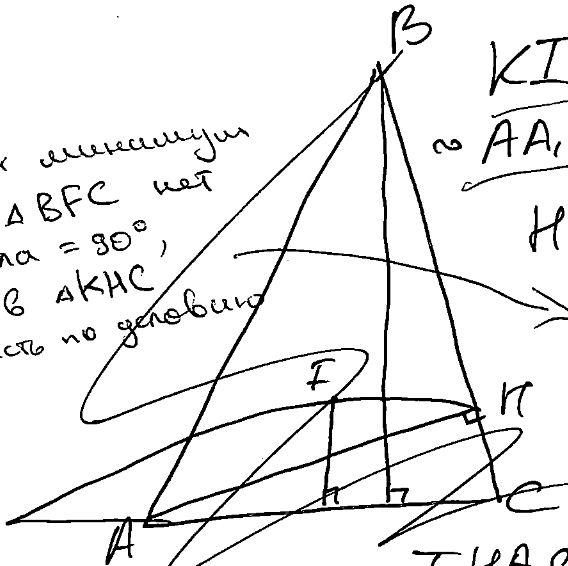
eeef	ghhh	eeef − ghhh	abcd	
4440	4111	229	4669	V
5551	5222	229	5780	V
6662	6333	229	6891	V
7773	7444	229	8002	V
8884	8555	229	9113	V
9995	9666	229	10224	X

В чем проблема

Ответ: 2458, 4669, 5780, 6891, 8002, 9113.

№5





Как минимум в $\triangle BFC$ нет угла = 90°, а в $\triangle KHC$ есть по условию

$KIF \sim KHC \sim$
$\sim AA_1C$ Почему?

$HC = FC = p - c$

$\Downarrow$

$\triangle BFC = KHC$ Почему?

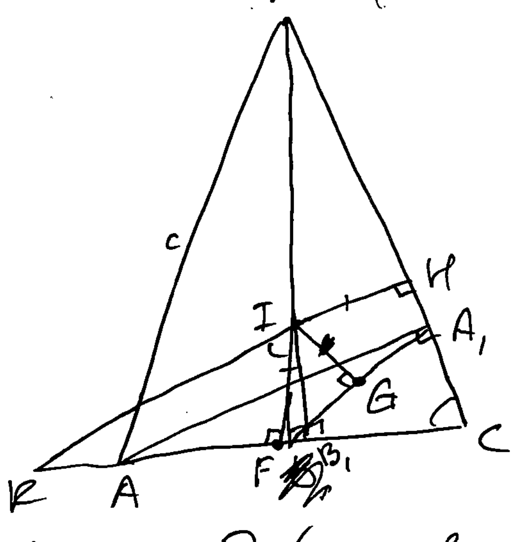
$\Downarrow$

$KC = BC = a$

IGB_1F – вписанный,

IHA_1G – вписанный,

$I H BFC$ – впис



$$\frac{KH}{KC} = \sin C = \frac{AA_1}{AC} = \frac{KB_1}{KI}$$

$KI = KH - r$ $\quad IF = IH = r$

$HC = FC = p - c$

$$\cos C = \frac{HC}{KC} = \frac{KI}{IF}$$ неверно, KI – гипотенуза см

$$\frac{p-c}{KC} = \frac{KI}{r}$$

$KC = P - (p-a+p-b+p-c) = p = \frac{P}{2} = 11$

ABA_1B_1 – описанный =>

$c + A_1B_1 = AB_1 + BA_1$

Ответ: $KC = 11$