ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101419388605

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия СМОЛИН

Имя АРТЁМ

Отчество НИКОЛАЕВИЧ

Дата рождения 15 12 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 433

Телефон 89120209321

Дата 05 02 2024 **Подпись** Ар

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101419388605

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 13:08 до 13:10

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	3	20	0					
Балл члена жюри №2	20	0	3	20	6					

Итоговый балл 46

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задача 1.

Пусть расстановка возможна. Обозначим 6 сумм по вертикали и 6 сумм по горизонтали в некотором порядке за $a, a+1, a+2, \dots a+11$. Сумма этих 12 сумм равна $12a + 66$. $12a + 66 \not\vdots\; 12$. (Здесь $a \in \mathbb{N}$)

С другой стороны, каждое число входит в две суммы: в сумму своего столбца и сумму своей строки. Поэтому ~~во вс~~ сумме всех сумм каждое число квадрата посчитано дважды. Отсюда сумма чисел в суммах равна $(1+2+\dots+36)\cdot 2 = \frac{(36+1)}{2}\cdot 36\cdot 2 = 37\cdot 36$. $37\cdot 36 \vdots 12$.

Получили, что сумма вертикальных и горизонтальных сумм делится на 12 и не делится на 12. Противоречие.

+

Ответ: нет.

Задача 4.

Пример:

			O	O			
		O			O		
O							O
	O					O	
	O					O	
O							O
		O			O		
			O	O			

O – значок оборотня.

В примере 16 оборотней, они бьют все клетки доски.

Оценка: Раскрасим таблицу 8×8 в четыре цвета. Заметим, что ~~цвет~~ клеток каждого цвета $\frac{8\cdot 8}{4} = 16$, и каждый оборотень бьёт только клетки одного цвета и не более 5 штук. Тогда, если на ~~каждый~~ какого-то цвета мы поставим 3 оборотня, то они будут бить не более $3\cdot 5 = 15$ клеток этого цвета, а ~~в~~ 16-ая клетка цвета не будет под боем. Значит, на клетки каждого цвета надо ставить хотя бы 4 оборотня, цветов 4. Следовательно, оборотней не меньше 16.

3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2

Ответ: 16

+

Задача 3

2 5 Пусть 4 и 6 не стоят рядом, и 2, 5 стоят так (не умаляя общности, что 5 правее 2.

Соседом „5" может быть 1, 3, 7.

Случай 1: 1 – сосед 5. Тогда соседи 1 – 5 и 4 или 5 и 6.

Пусть 5 и 6.(а) ~~Тогда соседи~~ Соседом 2 может быть 4, 6, 3, 7 но 6 уже занята. Пусть это 4. Тогда остались числа 3, 7, 8. 7 ⋮̸ 8 – 3, Рядом с 6 из них может стоять 7, 8, а рядом с 4 –

4 2
5
6 1
(а)

Задача 3.

Пусть 4 и 6 не стоят рядом. Через Н будем обозначать нечётное число, через Ч – чётное. Так как нечётное число не может стоять между двумя числами одной чётности, то получаем следующее (рис а) Пусть ~~между~~ соседи 2 – два нечётных числа.

2 5
Н Н
Н Ч
(а)

а это почему так?

Тогда имеем: (рис б.)

2 5
$Н_1$ $Н_2$
$Н_3$ Ч
Ч Ч
*

$Н_1, Н_2, Н_3$ – числа 1, 3, 7 в каком-то ~~(а)~~ порядке на соответствующих местах.

Обозначим чётное число, стоящее между двумя чётными числами *, * – число 8, иначе числа 4 и 6 стоят рядом.

$Н_1$ может быть 3, или 7. $Н_2$ может быть 7, ~~3 или~~ 1. Если $Н_3 = 1$, то $Ч \geq 8 - 1 = 7$, но чётных чисел, ~~кр~~ больших 7, кроме 8 нет. Значит $Н_2 = 1$. Пусть $Н_3 = 7$. Тогда $Н_1 : 7 - 2 = 5$, откуда $Н_1 = 5$. Противоречие. Остаётся, что $Н_3 = 3$. Тогда ~~$Н_2$~~ $Н_1 = 7$ и $Н_2 = 1$. Тогда имеем: (рис. в)

$Н_3 : Ч$ – Ч, ~~или~~ 3 : 7 –

2 5
7 1
3
8
(рис. в)

Заметим, что никакое чётное число, меньшее 8, не делится на 8 – 3 = 5. Поэтому расстановка (рис. в) невозможна.

~~Н~~ Значит, рядом с 2 – чётное число. Имеем: (рис д)

2 5
Ч $Н_1$ (рис д)
Ч

Второй случай забыт

Пусть чётное число граничит с 2 и ещё каким-то чётным числом. Тогда имеем (рис е). Заметим, что если между $Н_1$ и $Н_3$ стоит 8, то 4 и 6 стоят рядом. ~~Тогда пусть~~ $Ч_1$ может быть равно 4 или 6. Пусть ~~$Ч_1 = 8$~~ $Ч_1 = 4$, ~~$Ч_2 = 8$~~ тогда $Ч_2 = 8$, и $4 : 8 - 2$. Противоречие.

Пусть $Ч_1 = 6$. Тогда $Ч_2 = 8$, и $Ч_3 = 4$.

Имеем (рис. ж)

2 5
$Ч_1$ $Н_1$
$Ч_2$ $Ч_3$
$Н_2$ $Н_3$
(рис е)

6 2 5 (Если среди H_2 и H_3 есть 7, то)

H_1 Если $H_2 = 7$, то $H_3 = 1$, так как если $H_3 = 3$,

8 4 то $7 \not\vdots 8-3$. Тогда $1 \vdots 7-4$. Противоречие.

H_2 H_3 Если $H_2 = 1$, то $H_3 = 7$. Но $7 \not\vdots 4-1$. Противоречие.

Остаётся $H_2 = 3$. Тогда ~~$H_3 = 5$ (уже занято), и $H_3 = 7$. Тогда $H_1 = 1$. Но~~ Тогда $8 \vdots 6-3$, что неверно. # Получается, что если числа 4 и 6 не стоят рядом, то с 2 не может стоять ни нечётное число, ни чётное. Противоречие. Тогда 4 и 6 стоят рядом, что и требовалось.

Задача 2.

Заметим, что

$$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} =$$

$$= a\sqrt{(a^2+c^2+2abc)(a^2+b^2+2abc)} + b\sqrt{(a^2+b^2+2abc)(b^2+c^2+2abc)} +$$

$$+ c\sqrt{(b^2+c^2+2abc)(a^2+c^2+2abc)} \geqslant a\sqrt{(2ac+2abc)(2ab+2abc)} +$$

$$+ b\sqrt{(2ab+2abc)(2bc+2abc)} + c\sqrt{(2bc+2abc)(2ac+2abc)} =$$

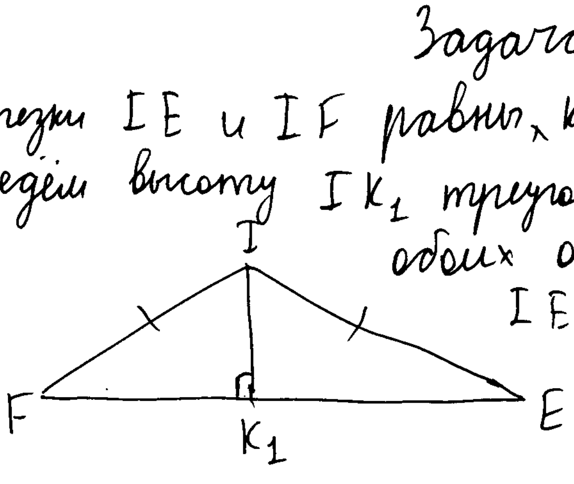
$$= 2a^2\sqrt{(1+c)(1+b)} + 2b^2\sqrt{(1+a)(1+c)} + 2c^2\sqrt{(1+b)(1+a)}.$$

Значит, нужно доказывать, что

$$a^2\sqrt{(1+c)(1+b)} + b^2\sqrt{(1+a)(1+c)} + c^2\sqrt{(1+b)(1+a)} \geqslant \sqrt{abc}$$

Задача 5.

Отрезки IE и IF равны, как радиусы вписанной окружности. Проведём высоту IK_1 треугольника IFE. Тогда K_1 лежит на обоих окружностях, построенных на IF и IE как на диаметрах и является серединой FE. Тогда K – середина FE. ~~Это верно, если~~



Бланк ответов