ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101393476720

Титульный лист

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [x] 9 [ ] 10 [ ] 11

Фамилия РОГОЖИН

Имя КОНСТАНТИН

Отчество АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 01 07 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И-405

Телефон +79221648457

Дата 05 02 2024 **Подпись** Коля

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101393476720

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	0	–					
Балл члена жюри №2	20	20	14	0	–					

Итоговый балл 57

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

1. v_u – скорость Ильи
v_H – скорость Настасьи
S – путь от Киева до Мурома
~~S~~

t – время встречи. $(t>0)$; ~~$S - v_H \cdot (t+4) = ?$~~

$$\begin{cases} t\cdot(v_u + v_H) = S \\ (t+1)\cdot v_u = S \\ S - (t+6)\cdot v_H = S - t\cdot v_u \end{cases}$$

(следует из условия)

$$\begin{cases} \cancel{t\cdot v_u} + t\cdot v_H = \cancel{t\cdot v_u} + v_u \\ t\cdot v_H + 6\cdot v_H = t\cdot v_u \end{cases}$$

$\Downarrow$

$t\cdot v_H = v_u$

$(t+6)\cdot v_H = t^2\cdot v_H$

$t+6 = t^2$

$t^2 - t - 6 = 0$

По т. Виета:

$t = 3; -2;$

Т.к $t>0$, $t = 3$,

~~$3\cdot v_H = v_u$~~

$4\cdot v_u = S$

$$\begin{cases} v_u = \frac{S}{4} \\ v_u + v_H = \frac{S}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{4} + v_H = \frac{S}{3}$$

$v_H = \frac{4\cdot S - 3S}{12} \Rightarrow v_H = \frac{S}{12}$

Путь, который остался: ~~$v_H = \frac{S}{12}$~~

$S - v_H(3+4) = S - \frac{10}{12}\cdot S = \frac{1}{6}S$

Время, за которое он будет пройден:

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot S}{\frac{S}{12}} = \frac{12}{6} = 2 \text{ часа}$$

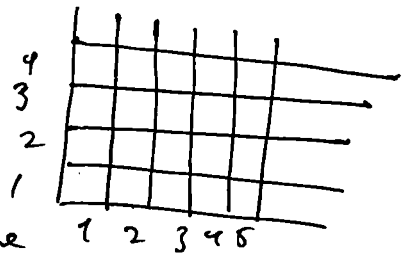
Ответ: 2 часа.

4. Площадь обеих фигур равна 8. $\Rightarrow S_{кв} : 8$

$S_{кв} = a^2$

$a^2 : 8 \Rightarrow a : 4$

Всего фигур будет $\frac{S_{кв}}{8} = \frac{a^2}{8}$



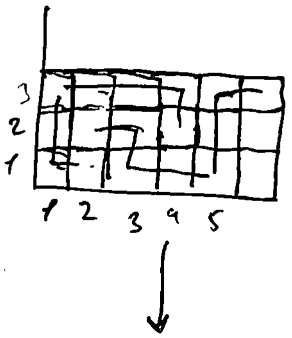
Рассмотрим угол квадрата

В клетке 1;1 червяк может находиться её верхним левым концом, но тогда клетки (1;2) и (1;3) будет невозможно заполнить, ибо ни у какой из фигур нет таких граней.

Получается, что (1;1) ~~зан~~ — часть червяка. Рассмотрим 3 случая:

поле:

1)



Клетки (2;2); (3;2); (3;1) может заполнять только червяк.

—

3. $\overline{abcd} - 229 = \overline{eeef}$

$\overline{eeef} - 229 = \overline{ghhh}$

~~$\overline{eeef} = \overline{ghhh} + 229$~~

$1110 \cdot e + f = 1000g + 111h + 229$

$111 \cdot 10e + f = 1000g + 111h + 222 + 7$

$111 \cdot 10e + f \quad 1000g + 111(h+2) + 7$

$111(10e - h - 2) + f = 1000g + 7$

$111(10e-h-2) \vdots 7$

$7 \vdots 7$

$f \overset{7}{\equiv} 1000g$

$f \overset{7}{\equiv} g$

2. При $n=2$: $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} = \sqrt{a_1 + 2a_2}$

$a_1 + 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 = a_1 + 2a_2$

$2\sqrt{a_1 a_2} = a_2 \quad | : \sqrt{a_2}$

$2\sqrt{a_1} = \sqrt{a_2}$

$4a_1 = a_2$

Докажем по индукции, что $n^2 \cdot a_1 = a_n$

Б.и $4a_1 = a_2$

П.и Пусть это верно для всех $n \leq k$

Ш.и $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} \dots + \sqrt{a_{k+1}} = \sqrt{a_1 + \dots + (k+1)a_{k+1}}$

Согласно П.и:

$\sqrt{a_1} + \sqrt{4 \cdot a_1} + \dots + \sqrt{a_{k+1}} = \sqrt{a_1} + 2\sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_{k+1}} = \sqrt{a_1}(1+2+\dots+k)$

$+ \sqrt{a_{k+1}}$

$\sqrt{a_1 + 8a_2 + \dots + k^3 a_2 + (k+1) \cdot a_{k+1}} = \sqrt{a_1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right) + \sqrt{a_{k+1}}$

Возведем равенство в квадрат

$$a_1 \cdot \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)(a_{k+1}) = a_1 \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{k(k+1)}{4}(\sqrt{a_1 a_{k+1}}) + a_{k+1}$$

Это 4 или 2? или тут пусто?

Общеизвестно, что

$$1+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$a_1 \cdot \sum_{i=1}^{k} i^3 = a_1 \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$k \cdot a_{k+1} = \frac{k(k+1)}{\cancel{4}1} \cdot \sqrt{a_1 a_{k+1}} \quad | : \sqrt{a_{k+1}}$$

$$\sqrt{a_{k+1}} = (k+1) \cdot \sqrt{a_1}$$

$$a_{k+1} = (k+1)^2 \cdot a_1, \text{ ч.т.д.}$$

По доказанному, $a_{2023} = 2023^2 \cdot a_1$

$$\frac{a_{2023}}{a_1} = 2023^2$$

+

3Я. $\overline{abcd}$ — изначальная сумма денег

$\overline{abcd} - 229 = \overline{eeef}$

$\overline{eeef} - 229 = \overline{hggg}$

$e > 1$ иначе $\overline{111f} - \cancel{2029}\ 229 < 1000$

$e \leq 8$, иначе $\overline{999f} + 229 > \cancel{10}\ 9999$

при $e = 2$:

$\overline{abcd} - 229 = \overline{222f}$; $\overline{222f} - 229 = \overline{hggg}$

при $f < 9$: $\overline{222f} - 229 = \overline{200f} - 9 = \overline{199x}$; что не удовлетворяет.

$f = 9$

$2229 + 229 = 2458$

А если $x = 9$?

при $e = 3$:

$\overline{abcd} - 229 = \overline{333f}$; $\overline{333f} - 229 = \overline{h333}$

$\overline{333f} - 229 = \overline{311f} - 9$

при $f = 9$: $3119 - 9 = \cancel{3101}$, не подходит.

иначе: $\overline{311f} - 9 = \overline{310x}$ 3110, не подходит. +

Бланк ответов

2. ~~При $n=2$~~

$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}=\sqrt{a_1+2a_1}$

Возведём в квадрат:

$a_1+2\sqrt{a_1a_2}+a_2=a_1+2a_1 \quad | : \sqrt{a_1}$

$2\sqrt{a_2}=\sqrt{a_1}$

$4a_2=a_1$

Докажем по индукции, что $n^2\cdot a_n=a_1$

Б.И. При $n=2$ $\quad 4a_2=a_1$

П.И. Пусть, ~~$k^2 a$~~ $k^2\cdot a_k=a_1$ ~~для~~ $(k-1)^2 a_{k-1}=a_1$ и т.д.

Ш.И.

$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}\ldots+\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}=\sqrt{a_1+2a_2+\ldots+(k+1)\cdot a_{k+1}}$

$\sqrt{a_1}+\sqrt{\frac{a_1}{4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_1}{k^2}}+\sqrt{a_{k+1}}=\sqrt{a_1+\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_1}{k}+(k+1)a_{k+1}}$

$\sqrt{a_1}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a_1}+\ldots+\frac{1}{k}\cdot\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{k+1}}=\sqrt{a_1}\sqrt{a_1\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{k}\right)+(k+1)(a_{k+1})}$

$\sqrt{a_1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)+\sqrt{a_{k+1}}=\sqrt{a_1\left(1+\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{k}\right)+(k+1)(a_{k+1})}$

~~a_1~~: обозначим $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}$ за H_k

~~$\sqrt{a_1}$~~ Возведем равенство в квадрат

$a_1\cdot H_k^2+\sqrt{a_1a_{k+1}}\cdot H_k+a_{k+1}=a_1\cdot H_k+(k+1)(a_{k+1})$

$a_1 H_k(a_1\cdot H_k+\sqrt{a_1a_{k+1}}\ k-a_1)=a_{k+1}$

при $e=4$: $\overline{444f}-229=\overline{h999}$

$\overline{422f}-9=\overline{h999}$

при $f=9$ очевидно не подходит, иначе $\overline{422f}-9=\overline{4 2 1 x}$, не подходит

~~при $e=5$~~

$\overline{555f}-229=\overline{h999}$

$\overline{533f}-9=\overline{h999}$

при $e \geqslant 4$:

$\overline{eeef} - 229 = \overline{e(e-2)(e-2)f} - g$

при $f < g$:

$\overline{e(e-2)(e-2)f} - g = \overline{e(e-2)(e-3)(10+f-g)}$, не подходит

при $f = g$: $\overline{e(e-2)(e-2)0}$, что возможно лишь при $e=2$

при $e = 2$: $\overline{abcd} = 2458$