ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101867891173

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия АЗАНОВ

Имя ЛУКА

Отчество ИГОРЕВИЧ

Дата рождения 08 07 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И-405

Телефон +79995640807

Дата 05 02 2024 **Подпись** Lt Java

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101867891173

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	25	10	09						
Балл члена жюри №2	00	25	00	09						

Итоговый балл 034

Подпись члена жюри №1 Шир

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание №4.

1). 101 - простое число. Единственная пара $\{n, m\}$ таких, что $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \cdot m = 101$ это $\{1, 101\}$ (считаем пары неупорядоченными). $НОД(1, 101) = 1$, пара подходит и единственна.

Ответ. Красота числа 101 равна 1. + 4б

2) Пусть $k(n)$ — красота числа n.

Кол-во множителей в разложении числа на простые $\leq \log_2 n$.

$\log_2 1024 = 10 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq 1024 \Rightarrow k(n) \leq 10$. почему?

Т.к. есть условие, что НОД чисел в паре равен 1, то для достижения максимального значения $k(n)$ числа в разложении должны быть взаимнопросты.

Рассмотрим самые маленькие произведения простых чисел:

$2 \cdot 3 = 6$ | $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ | $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2310$

+ 5б

Если $k(n) \geq 4$, то существует 4 простых числа, различных между собой, которые входят в его разложение на простые множители. (если какое-то простое число входит в разложение несколько раз, то это число всегда будет либо все свои вхождения „оставлять" в числе m, либо в n, иначе $НОД(n, m) > 1$). Т.к. минимальное произведение простых 4-х различных чисел $2310 > 1024$ мы получаем оценку (также учтем случай умножения на 1)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq 1024 \Rightarrow k(n) \leq 3 + 1 = 4$

Пример для данной оценки: $k(66) = 4$ $(\{\{2, 33\}, \{3, 22\}, \{6, 11\}, \{1, 66\}\})$.

Ответ. Максимальная красота числа до 1024 равна 4.

Задание №3.

В условии не указано, различны ли фишки между собой. Рассмотрим 3 случая:

1). Все фишки различны. Тогда каждую из 18 фишек можно поставить в любую из 24 позиций.

24^{18} вариантов стартовой позиции. (кол-во перестановок с повторениями).

2). Все фишки одинаковы. Воспользуемся формулой сочетаний с повторениями.

Тогда C'^{k}_{n} – кол-во способов выбрать k, возможно, повторяющихся элементов из n.

Ответ – C'^{18}_{24} $-$

3). 9 фишек белые, а 9 – черные.

У нас есть C'^{9}_{24} способов расставить фишки каждого цвета.

Ответ – $C'^{9}_{24} \cdot C'^{9}_{24}$ или $(C'^{9}_{24})^2$

Задание №2.

Суммарная протяженность поверхности гор равна 4096. Значит поверхность одной горы $4096-k$, а другой — k.

Найдем площадь горы, зная ее протяженность a. Т.к. углы при основаниях гор равны и равны 45°, то формула площади п/у треугольника $\frac{1}{2}a\cdot b$ подойдет.

$$S_{\text{горы}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{8}$$

$$S_1 = \frac{k^2}{8}$$

$$S_2 = \frac{(4096-k)^2}{8} = \cancel{\frac{(64-k)(64+k)}{8}} = \frac{4096^2 - 2\cdot 4096\cdot k + k^2}{8} = \frac{2^{24} - 2^{13}\cdot k + k^2}{8}$$

Необходимо найти $k>0$ такое, что $\frac{k^2}{8} + \frac{2^{24}-2^{13}\cdot k + k^2}{8}$ — минимально возможно.

$$\frac{k^2}{8} + \frac{2^{24}-2^{13}\cdot k+k^2}{8} = \frac{2(2^{23}-2^{12}\cdot k+k^2)}{8} = \frac{2^{23}-2^{12}\cdot k+k^2}{4}$$

$$S = \frac{k^2}{8} + \frac{(4096-k)^2}{8} = \frac{2^{23}-2^{12}\cdot k+k^2}{4}$$

$\forall i \; S_i > 0 \Rightarrow 0 < k < 4096$

С ростом k ф-ия $\frac{k^2}{8}$ возрастает, $\frac{(4096-k)^2}{8}$ убывает. Минимум обоих значений одновременно достигается в точке $\frac{k^2}{8} = \frac{(4096-k)^2}{8}$.

$k^2 = 2^{24} - 2^{13}k + k^2$

$2^{13}\cdot k = 2^{24}$

$k = 2^{11} = 2048.$

(+) 25 б

$$S = \frac{2^{22}}{2^3} + \frac{(2^{12}-2^{11})^2}{2^3} = \frac{2^{22}}{2^3} + \frac{2^{24}-2^{24}+2^{22}}{2^3} = \frac{2\cdot 2^{23}}{2^3} = 2^{20} = 1'048'576$$

Ответ. Площадь равна 2^{20} (минимально).

Задание №1.

Рассмотрим уголок.

x	y	z	a	...
q	t	m	b	
r	d	e	c	
g	h	j	Σ	

1. $x+y=r+d$
2. $x+q=z+m$
3. $d+e=y+z$
4. $q+r=m+e$
5. $y+t=a+b$
6. $t+d=b+c$
7. $z+a=e+c$
8. $r+g=e+j$
9. $q+t=g+h$
10. $t+m=h+j$
11. $m+e+d=x+y+q$
12. $q+r+d=y+z+m$
13. $y+z+t=e+c+b$
14. $t+d+e=a+b+z$
15. $r+g+h=t+m+e$
16. $r+g+t=h+e+j$.
17. $x+y+q+t=64$

16 уравнений, 15 неизвестных, систему можно решить.

$x=r+d-y$

$q=z+m+y-r-d$

$t=g+h+r+d-z-m-y$

$c=2d+g+h+r-z-m-y-b$

$z+a=e+2d+g+h+r-z-m-y-b$

$a=e+2d+g+h+r-m-y-b-2z$.

$r=m+e-z-m-y+r+d$

$y=e+d+r-z$

$e+d+r-z+g+h+r+d-z-m-y=e+2d+g+h+r-m-y-b-2z+b$

$r=6 \Rightarrow r=64$,

$g=e+j$

Т.к. стороны кратны 4, мы можем точно определить сумму на периметре по формуле:

$$(x+y+z+a)\cdot 2^9+(g+h+j+\Sigma)\cdot 2^9+(x+q+r+g)\cdot 2^7+(a+b+c+\Sigma)\cdot 2^7-x-a-\Sigma-g.$$

Решение данной системы возможно, но довольно громоздко, потому приводить его я не буду.

Бланк ответов