ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302141250634

Титульный лист

Направление	[ ] информатика [ ] история [x] математика [ ] обществознание [ ] русский язык [ ] физика [ ] химия
Класс	[ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11
Фамилия	ПОЛОЗОВ
Имя	ДАНИИЛ
Отчество	ВИКТОРОВИЧ
Дата рождения	19 07 2006
Город участия	НОВОУРАЛЬСК
Аудитория	323
Телефон	+79965942529

Дата 05 02 2024 Подпись

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302141250634

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия НОВОУРАЛЬСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	–	–					
Балл члена жюри №2	20	20	0	–	–					

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 2.

По условию: $a>0,\ b>0,\ c>0$ и $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

~~Верно~~ Док-ть: $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\leq 2\sqrt{abc}$

Док-во:

1) Рассмотрим $(1-\sqrt{abc})^2\geq 0$

~~$\sqrt{abc}$~~ $abc>0$, т.к. по условию $a>0, b>0$ и $c>0$

Значит $\sqrt{abc}$ существует.

$(1-\sqrt{abc})^2\geq 0$ – верно при любом a,b,c подходящих под условие задачи ($a>0, b>0$ и $c>0$).

$(1-\sqrt{abc})^2\geq 0$

$(\sqrt{abc})^2=|abc|=abc$, т.к. $a>0$, $b>0$, $c>0$

$1-2\sqrt{abc}+abc\geq 0$

$1+abc\geq 2\sqrt{abc}$

$1=a^2+b^2+c^2+2abc$ по условию

$a^2+b^2+c^2+2abc+abc\geq 2\sqrt{abc}$

$(a^2+abc)+(b^2+abc)+(c^2+abc)\geq 2\sqrt{abc}$

$a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab)\geq 2\sqrt{abc}$ (1)

2) а) $a^2+b^2+c^2+2abc=1\ |-b^2-c^2$

$a^2+2abc=1-b^2-c^2\ |+b^2c^2$

$a^2+2abc+b^2c^2=1-b^2-c^2+b^2c^2$

$(a+bc)^2=(1-b^2)(1-c^2)\ \Big|\ a>0,\ b>0,\ c>0$

$a+bc=\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}$ (2)

б) $a^2+b^2+c^2+2abc=1\ |-a^2-c^2$

$b^2+2abc=1-a^2-c^2\ |+a^2c^2$

$b^2+2abc+a^2c^2=1-a^2-c^2+a^2c^2$

$(b+ac)^2=(1-a^2)(1-c^2)\ \Big|\ a>0,\ b>0,\ c>0$

(3) $b+ac=\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}$

в) $a^2+b^2+c^2+2abc=1 \mid -a^2-b^2$

$c^2+2abc=1-a^2-b^2 \mid +a^2b^2$

$c^2+2abc+a^2b^2=1-a^2-b^2+a^2b^2$

$(c+ab)^2=(1-a^2)(1-b^2)$ $a>0, b>0$ и $c>0$

$c+ab=\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$ (4)

3) Подставим (2), (3) и (4) в (1):

$a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab) \geq 2\sqrt{abc}$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$

Т.к. $(1-\sqrt{abc})^2 \geq 0$ - верно, и с помощью равносильных преобразований, не противоречащих условию задачи, получим

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$, значит данное неравенство тоже верно.

+

ч.т.д.

Задание 1.

Пусть существует такой квадрат 6×6, в клетках которого расположены числа от 1 до 36 и у которого 6 сумм по горизонтали и 6 сумм по вертикали в некотором порядке являются 12 послед. числами.

1) Тогда, обозначим 12 сумм: $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$

2) Если просуммировать все a_i, то мы получим удвоенную сумму всех чисел в квадрате.

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = 2\sum_{n=1}^{36} n = 2 \cdot \frac{36(36+1)}{2} = 36 \cdot 37 \quad (1)$$

2) Так как $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{12}$ – послед числа, то

~~a_1 можно представ~~ $a_{n+1} = a_n + 1$ или $a_n = a_1 + (n-1)d$,

где $d = 1$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{12} a_{n} = \frac{\sum_{n=1}^{12} a_n + \sum_{n=1}^{12} a_n}{2} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2} = 6(a_1 + a_1 + (12-1)\cdot 1)$$

$$= 6(2a_1 + 11) = 12a_1 + 66 \quad (2)$$

3) ~~Подставим (2) в (1)~~

(1): $\sum_{n=1}^{12} a_n = 36 \cdot 37$

(2): $\sum_{n=1}^{12} a_n = \cancel{6}^{12} a_1 + 66$

$\cancel{6}^{12} a_1 + 66 = 36 \cdot 37$

$$a_1 = \frac{\cancel{36}^{6} \cdot 37 - \cancel{66}^{11}}{\cancel{12}_{2}} = \frac{222 - 11}{2} = \frac{211}{2} = 105{,}5$$

4) ~~Так как числа в квад~~ Так как расставленные числа в квадрате являются целыми, то и суммы по горизонтали и вертикале тоже должны быть целыми, ~~но, но~~ поэтому такого квадрата не существует, так как одна из сумм не является целым числом.

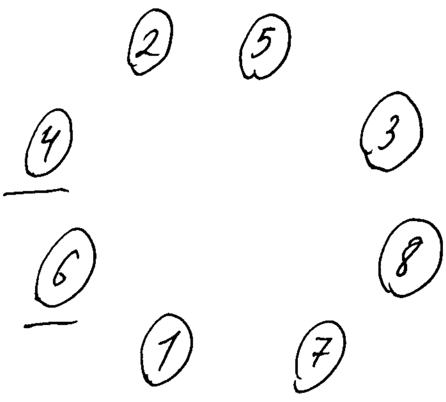
~~Отве~~

Ответ: Нет

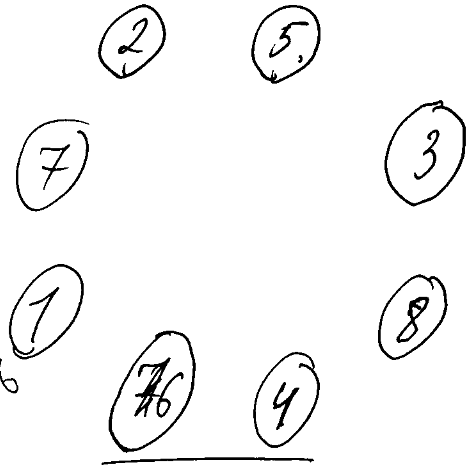
Задание 3

Найдены примеры расстановки, удовлетворяющие условию задачи:

1.

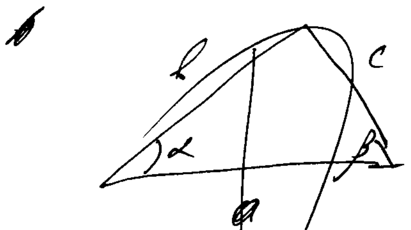


2.



ч.т.д.

рассмотрены лишь два частных случая



$$b^2=a^2+c^2-2a\cancel{b}c\cdot\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha$$

$$c^2=2a^2+c^2-2a\cancel{b}c\cdot\cos\beta-2ab\cdot\cos\alpha$$

$$2a^2-2ac\cdot\cos\beta-2ab\cdot\cos\alpha=0\ \mid :2a$$

$$\cancel{2a}\ a-c\cdot\cos\beta-b\cdot\cos\alpha=0$$

$$a=c\cdot\cos\beta+b\cdot\cos\alpha$$

Бланк ответов