ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101479912919

Титульный лист

Направление	☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11
Фамилия	КИЛЬМЕТОВ
Имя	ДАНИЛ
Отчество	БУЛАТОВИЧ
Дата рождения	29 11 2006
Город участия	ПЕРМЬ
Аудитория	124
Телефон	89023318999

Дата 05 02 2024 **Подпись** Кил

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101479912919

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия П Е Р М Ь

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке 1

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	25	25	25						
Балл члена жюри №2	00	25	25	25						

Итоговый балл 075

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 3

$S(X) = \sum\limits_{x \in X} 2^x$. Число 2^x представляется в двоичной системе счисления как $\underbrace{1000...00}_{x \text{ нулей}}$. Если сложить 2^x для всех x, явл. номерами вершин в цикле, то можно заменить, что для каждого двоичного разряда верно, что этот разряд равен единице ровно у одного слагаемого, а у остальных он равен нулю. Например, если цикл состоит из вершин 3, 4 и 5, то $S(X) = 2^3_{10} + 2^4_{10} + 2^5_{10} = 1000_2 + 10000_2 + 100000_2$. ~~Пятый~~ Шестой разряд равен 1 только у числа 2^5, пятый равен 1 только у числа 2^4 и т.д. Отсюда следует, что результат сложения этих чисел будет равен результату их xor, т.е. $S(X) = 2^{x_1} \text{ xor } 2^{x_2} \text{ xor} \dots \text{xor } 2^{x_k}$, $\{x_1; x_2; \dots; x_k\} \subset X$.

$\left.\begin{array}{l} g(P) = \text{xor}_{X \in C(P)} S(X),\ C(P) \text{ - множ-во всех циклов перестановки} \\ S(X) = 2^{x_1} \text{ xor } 2^{x_2} \text{ xor} \dots \text{xor } 2^{x_k},\ \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset X \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(P)$ будет равно xor значений 2^x для всех вершин графа, т.е. для всех чисел от 1 до n. Отсюда следует, что значение функции g не зависит от перестановки и всегда равно $2^1 \text{ xor } 2^2 \text{ xor} \dots \text{xor } 2^n = 2^{n+1} - 2$. Если взять xor значений функции g по всем перестановкам ~~от~~ чисел от 1 до n, то мы получим 0, если число перестановок чётно и $2^{n+1} - 2$ иначе. Поскольку число перестановок чисел от 1 до n равно $n!$, то xor значений g будет равен нулю для любого n, кроме единицы, а для единицы xor значений g будет равен $2^{1+1} - 2 = 2$ (т.к. $n!$ четно для любого натур. числа, кроме единицы)

Ответ: xor значений функции g равен по всем перестановкам чисел от 1 до n равен нулю при n отличном от 1, либо 2 при $n = 1$

(+) 25

Задание 4

$F(n,k) = \sum\limits_{i=1}^{n} gcd(i, i+k)$. Алгоритм Евклида опирается на тот факт, что $gcd(a, b) = gcd(b, a-b)$, $a \geqslant b$. Мы можем воспользоваться этим фактом для нахождения $F(n,k)$: $F(n,k) = \sum\limits_{i=1}^{n} gcd(i, i+k) = \sum\limits_{i=1}^{n} gcd(i, k)$

1) $F(7,7)=\sum_{i=1}^{7} gcd(\cancel{7}, i, 7)$. Поскольку 7 — простое число, оно будет взаимно просто со всеми числами меньше него. Также, $gcd(7,7)=7$. Отсюда следует, что $F(7,7)=gcd(1,7)+gcd(2,7)+...+gcd(7,7)=\underbrace{1+1+...+1}_{6}+7=$ $=13$

Ответ: $F(7,7)=13$ +

2) $F(1024,1024)=\sum_{i=1}^{1024} gcd(i,1024)$. $1024=2^{10}$, => в его разложении на простые множ. входит всего одно простое число, => ~~1024~~ $gcd(i,1024)$ равно максимальной степени двойки, входящей в разложение числа на множители. Заметим, что показатель этой степени равен количеству нулей ~~в двоичной~~ ~~представ~~ в конце двоичной записи числа i. Пусть мы хотим найти кол-во чисел, не превосходящих 1024, ~~в ко~~ двоичная запись которых оканчивается k нулями. Поскольку числа ~~мен~~ не более 1024, все числа, кроме 1024, состоят из не более, чем 10 двоичных разрядов (т.к. $1024=2^{10}$). Из них, младшие ~~последние~~ k разрядов равны 0, а следующий за ними равен 1. Остальные разряды можно выбрать 2^{10-k-1} способами. Отсюда следует, что количество чисел <1024, для которых $gcd(i,1024)=2^0$ равно 2^9, ~~д~~ кол-во чисел, для которых $gcd(i,1024)=2^1$ равно 2^8 и т.д.

Получаем, что $F(1024;1024)=2^9\cdot 2^0+2^8\cdot 2^1+...+2^0\cdot 2^9+gcd(1024,1024)=$

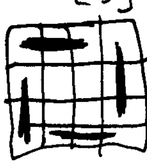
$=2^9\cdot 10+1024=5120+1024=6144$

Ответ: $F(1024;1024)=6144$

+ 25б

Задание 2

1) При $n=256$ и $m=1024$: оба числа n и m дают остаток 1 при делении на 3. Это значит, что мы можем разбить клетки, наход. по периметру на полоски ~~размера~~ длины 3; вдоль верхней и нижней границу положим по $\left[\frac{m}{3}\right]$ вертикальных; по $\left[\frac{n}{3}\right]$ горизонтальных полосок, а вдоль левой и правой



← пример для $n=4$ и $m=4$ (они тоже дают остаток 1 при делении на 3)

Отсюда следует, что в данном случае клетки по периметру в сумме дают $32\cdot\left(\left[\frac{n}{3}\right]\cdot 2+\left[\frac{m}{3}\right]\cdot 2\right)=32\cdot\left(\left[\frac{256}{3}\right]\cdot 2+\left[\frac{1024}{3}\right]\cdot 2\right)=$

$=32\cdot(85\cdot 2+341\cdot 2)=32\cdot 852=27264$

Ответ: 27264

+ 3б

1.2

2) При $n = 503$ и $m = 1024$: в этом случае, остаток от деления n на 3 равен двум. Также, есть условие, что один из углов отсутствует
Заметим, что значения в одной строке через каждые три столбца, а также значения в одном столбце через каждые три строки совпадают

x	4	2	x

← значения в первой и четвертой клетке совпадают, т.к. суммы первых трех и последних трех совпадают, а второй и третий ~~вст~~ встречаются в обеих суммах. Отсюда следует, что картинку можно разбить на одинаковые квадраты 3×3, ~~часть которых~~ некоторые из которых могут входить не полностью. В таком случае, ответ зависит от содержимого ~~квадрата~~ каждого квадрата, но при этом он не менее $32\cdot(((503+1024-2)\cdot 2-2)/3) = 32\cdot((3050-2)/3) = 32\cdot 1016 = 32512$

Задание 1

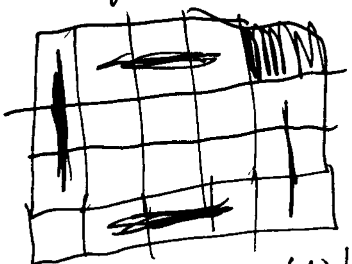
Практически для любой пары $1 \le a \le b \le 2048$ таких, что a и b взаимнопросты выполняется $gcd(a,b) < a \oplus b$, где $\oplus$ – исключающее ИЛИ двух чисел
Поскольку таких пар много и их тяжело искать, можно из общего количества пар вычесть те, для которых условие не выполняется
При $a=b$ $a\oplus b=0$ т.к. каждый бит совпадает, а $gcd(a,b) = a = b$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow gcd(a,b) > a\oplus b$. Таких пар 2048

− 0

~~При a~~ При $a\oplus b \neq 0$: ~~$gcd(a,b) = a\oplus$~~ $gcd(a,b) \le a\oplus b \Rightarrow$ усл. нарушится только при $gcd(a,b) = a\oplus b$

Задание 2 (продолж.)

Почему ответ зависит от содержимого:



5×4, $5 \equiv 503 \pmod 3$
$4 \equiv 1024 \pmod 3$

ровно одна клетка не покрывается полоской 1×3 вне завис. от разбиения на полоски значение остается одним и тем же

13	8	11
8	16	8
11	8	11

11	8	13
8	16	8
13	8	11

А числа, запис. в квадратах 3×3 (где каждая строка и столбец в сумме дают 32) могут отличаться

Бланк ответов

$(a,b) \geqslant a \oplus b$:
- при $a=b$, т.е. $a \oplus b = 0$
- если ~~пара чисел~~ $a \oplus b = 1$, т.е. числа отл. 1 битом, т.е. последовательные

к задаче 1

если $a \oplus b = 2$

a	·	·	·	0	·
b	·	·	·	1	·
$a \oplus b$	0	0	0	1	0

$gcd(a,b) = gcd(a, a+2) = gcd(a,2)$

при $a \vdots 2$ $gcd(a,2) = 2$ $gcd(a,2) \geqslant a \oplus b$

при $a \not\vdots 2$ $gcd(a,2) = 1$ $gcd(a,2) < a \oplus b$

$a \oplus b = 3$

a	·	·	·	0	0/1
b	·	·	·	1	1/0
$a \oplus b$	0	0	0	1	1

$gcd(a,b) = gcd(a, a+3) = gcd(a,3) \Rightarrow$ выполн. при $a \vdots 3$

$gcd(a,b) = gcd(a, a+1) = 1 \Rightarrow$ всегда выполн.

$a \oplus b = 4$

a	·	·	0	·	·
b	·	·	1	·	·
$a \oplus b$	0	0	1	0	0

$gcd(a,b) = gcd(a, a+4) = gcd(a,4)$

при $a \vdots 4$ усл. не выполн.

при $a \not\vdots 4$ усл. выполн.

$a \oplus b = 5$

a			0	·	0/1
b			1	·	1/0
$a \oplus b$	0	0	1	0	1

$gcd(a,b) = gcd(a, a+5)$

$gcd(a,b) = gcd(a, a+3)$

$a \oplus b = 6$

a	·	·	0	0/1	·
b	·	·	1	1/0	·
$a \oplus b$	0	0	1	1	0

$gcd(a,b) = (a, a+6)$

$(a,b) = (a, a+2)$

$gcd(a,b) \geqslant a \oplus b$

В

$gcd(a,b) = a \oplus b$

Если $a \oplus b = 0$, то нет

Если $a \oplus b > 0$, то

$$\begin{array}{r} 1016 \\ \times\ 32 \\ \hline 2032 \\ +\ 3048 \\ \hline 32512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1016 \\ \times\ 32 \\ \hline 2032 \end{array}$$

Возм. условие не выполн. при $a \vdots (a \oplus b)$

~~$gcd(2,6) = 2$~~ 6

$d = a \oplus b$

$gcd(a,b) = gcd$

~~При $a \vdots 2$~~

~~$a = (a \oplus b) \cdot k$~~

$3048 \,|\, 3$

-3 $\quad 1016$

-04

$\quad 3$

$\quad 18$

$$\begin{array}{r} 1525 \\ \times\ 2 \\ \hline 3050 \end{array}$$

$a \oplus b < gcd(a,b)$

$gcd(4,5) = 1$ $\quad 4 \oplus 5 = 1$

$gcd(4,6) = 2$ $\quad 4 \oplus 6 = 2$

256 $(503 + 1024 - 1) \cdot 2 - 2$

$(503 + 1024 - 2) \cdot 2$

a

b

$$\begin{array}{r} 1024 \\ +\ 503 \\ \hline 1527 \end{array}$$

14

$$\begin{array}{r} 1527 \\ +\ 1527 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1528 \\ -\ 1525 \\ \hline 0035 \end{array}$$

Математика 11 класс **1 вариант**

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) Можно ли в клетках квадрата 6×6 расставить числа от 1 до 36 (каждое по одному разу) так, чтобы 6 сумм по горизонтали и 6 сумм по вертикали в некотором порядке являлись 12 последовательными числами?

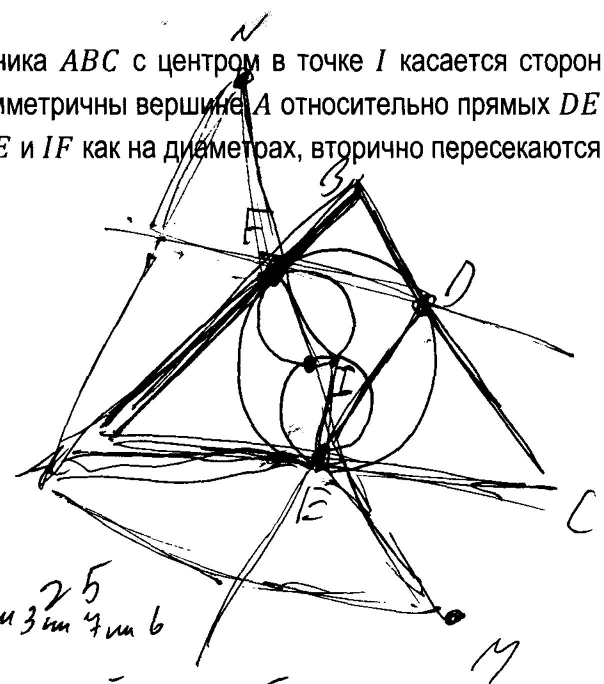
Задание 2. (20 баллов) Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Докажите, что $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$.

Задание 3. (20 баллов) Натуральные числа от 1 до 8 расставили по кругу так, что каждое число делится на разность своих соседей. Известно, что числа 2 и 5 стоят рядом. Докажите, что числа 4 и 6 стоят рядом.

Задание 4. (20 баллов) Фигура *оборотень* бьёт все клетки, находящиеся от неё через клетку слева, справа, сверху или снизу, а также бьёт клетку, на которой стоит (см. рисунок). Какое наименьшее количество оборотней необходимо поставить на клетчатую доску 8×8, чтобы эти фигуры били все клетки доски?

		x		
x		O		x
		x		

Задание 5. (20 баллов) Вписанная окружность треугольника ABC с центром в точке I касается сторон BC, AC, AB соответственно в точках D, E, F. Точки M и N симметричны вершине A относительно прямых DE и DF соответственно. Окружности, построенные на отрезках IE и IF как на диаметрах, вторично пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на прямой MN.



2 5 4 7 6

2 5 3 1 4

2 5 6 7 4 8

2 5 7 3 1 6 4 8

4 или 3 или 4 или 6

при 4:

2 5 4 6 1 3 8 7 1

2 5 4 6 3