ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101201483948

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия РОЖКОВА

Имя ПОЛИНА

Отчество МАКСИМОВНА

Дата рождения 12 05 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И408

Телефон [redacted]

Дата 05 02 2024 Подпись

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101201483948

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☑ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2 0	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	~~3~~ 0	20	–	–					
Балл члена жюри №2	20	0	20	—	—					

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание №2.

Т.к. послед. удовл. равенству при всех $n \le 2023$, то существует 2023 таких равенств для каждой последовательности. Будем рассматривать их по порядку, пока не найдём закономерность.

За x возьмём результат ~~ка~~ какой-либо стороны из предыдущего рассм. равенства.

(т.е. для i ~~=~~ $x_i = \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots \sqrt{a_{i-1}}$)

$x_1 = 0$ (до этого равенств не было.

$x_1 + \sqrt{a_1} = \sqrt{x_1^2 + 1 \cdot a_1}$

$\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}$. a_1 может иметь любое значение.

~~$x_2 = \sqrt{a_1}$~~

~~$x_2 + \sqrt{a_2} = \sqrt{x_2^2 + 2a_2}$ Возведём в квадрат:~~

~~$x_2^2 + 2x_2\sqrt{a_2} + a_2 = x_2^2 + 2 \cdot a_2$~~

~~$2x_2\sqrt{a_2} = a_2$~~

$x_n + \sqrt{a_n} = \sqrt{x_n^2 + na_n}$ Возв. в квадрат

$x_n^2 + 2x_n\sqrt{a_n} + a_n = x_n^2 + na_n$

$2x_n\sqrt{a_n} = a_n \cdot n - a_n$

$2x_n\sqrt{a_n} = a_n(n-1)$

$2x_n\sqrt{a_n} - a_n(n-1) = 0$

$\sqrt{a_n}\,(2x_n - \sqrt{a_n}(n-1)) = 0$

$\sqrt{a_n} = 0$ или $2x_n - \sqrt{a_n}(n-1) = 0$

$\sqrt{a_n}(n-1) = 2x_n$ $\quad \sqrt{a_n} = \dfrac{2x_n}{n-1}$

$a_n \neq 0$

$a_n = \dfrac{4x_n^2}{(n-1)^2}$.

не подходит, т.к. по усл. все числа положительные

Тогда для a_2: $x_2 = \sqrt{a_1}$

$a_2 = \dfrac{4 \cdot \sqrt{a_1}^2}{(2-1)^2} = \dfrac{4 \cdot a_1}{1} = 4a_1 = 2^2 a_1$

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{2^2 a_1} = \sqrt{a_1 + 2\cdot 2^2 a_1}$$

$$\sqrt{a_1} + 2\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1(1+8)}$$

$$3\sqrt{a_1} = \cancel{9}\sqrt{9a_1} \qquad X_3 = 3\sqrt{a_1}$$

$$a_3 = \frac{4\cdot(3\sqrt{a_1})^2}{(3-1)^2} = \frac{4\cdot 9a_1}{2^2} = 9a_1 = 3^2 a_1$$

$$X_3 + \sqrt{a_3} = \sqrt{X_3^2 + 3\cdot a_3}$$

$$3\sqrt{a_1} + \sqrt{3^2 a_1} = \sqrt{3^2\sqrt{a_1}^2 + 3\cdot 3^2 a_1}$$

$$3\sqrt{a_1} + 3\sqrt{a_1} = \sqrt{9a_1 + 27a_1}$$

$$6\sqrt{a_1} = \sqrt{36a_1} \qquad X_4 = 6\sqrt{a_1}$$

$$a_4 = \frac{4\cdot(6\sqrt{a_1})^2}{(4-1)^2} = \frac{4\cdot 36a_1}{9} = 16a_1 = 4^2 a_1$$

Можно заметить, что $a_i = i^2 a_1$ (можно проверить, нужно эта закономерность идёт и дальше)

тогда $a_{2023} = 2023^2 a_1$

$$\frac{a_{2023}}{a_1} = \frac{2023^2 a_1}{a_1} = 2023^2$$

Ответ: 2023^2

Задание 3.

Представим число, полученное после первой покупки как $\overline{aaax}$, а после второй $\overline{ybbb}$.

Тогда $\overline{aaax} - 229 = \overline{ybbb}$

Если $x = 9$, то другие разряды никак не поменяются, тогда $b = x - 9 = 9 - 9 = 0$.

$$\begin{array}{r} a\,a\,a\,\cancel{x}9 \\ -\ \ 2\,2\,9 \\ \hline y\,0\,0\,0 \end{array}$$

~~a-2a~~ $a - 2 = 0 => a = 0 + 2 = 2$

В этом случае $\overline{aaax} = 2229$, $\overline{ybbb} = 2000$, тогда изначально у Васи было $2229 + 229 = 2458$ рублей.

Для $x < 9$ при вычитании мы будем занимать 1 у предыдущего разряда. Если $a > 2$, то при дальнейшем вычитании мы ~~пол~~ заметим, что второй разряд слева равен $a - 2$, а третий - $a - 2 - 1$ (т.к. заняли 1). Значит, для $x < 9$ ~~а~~ должно быть $a \le 2$.

При этом мы не можем поставить $a = 0$ (не будет четырёхзначным числом) и $a = 1$ (занимая у 1, мы получим трёхзначное число).

Тогда для $x < 9 \to a = 2$. Проверим это и найдём необходимые числа:

$$\begin{array}{r} \dot{2}\,\overset{10}{\dot{2}}\,\overset{10}{\dot{2}}\,\overset{10}{X} \\ -\ \ 2\,2\,9 \\ \hline 1\,9\,9 \end{array}$$

~~Х+~~ $X + 10 - 9 = b$ $\quad X + 1 = b$

b (как можно заметить) $= 9$

$X + 1 = 9$ ~~Тогда~~ $X = 8$.

Тогда мы имеем: $\overline{aaax} = 2228$, $\overline{ybbb} = 1999$

Изн. число: $2228 + 229 = 2457$.

Можно проверить:

Если $a = 3$:

$$\begin{array}{r} \overset{\cdot}{3}33\overset{10}{x} \\ -\quad 229 \\ \hline 310\cancel{x} \end{array}$$

Все ~~числа~~ цифры различны. При увеличении a мы продолжим занимать 1 только в 1 разряде.

Если $a = 1$:

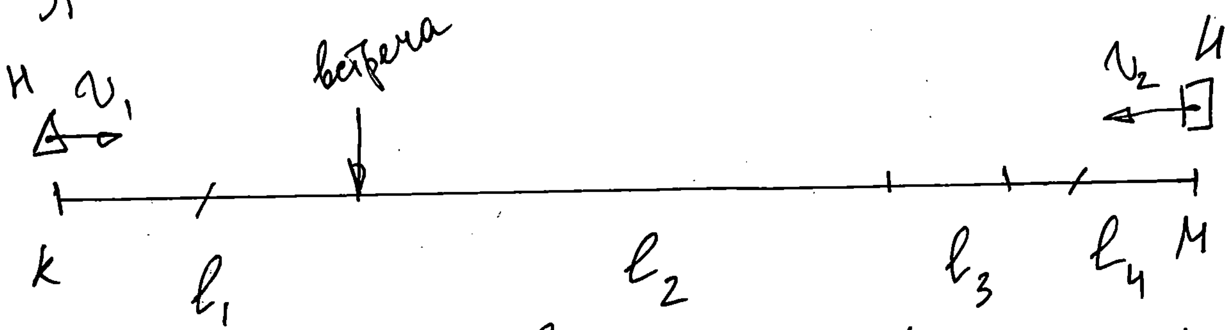
$$\begin{array}{r} \overset{\cdot}{1}\overset{10}{\dot{1}}\overset{10}{\dot{1}}\overset{10}{x} \\ -\quad 229 \\ \hline 088 \end{array}$$

Первая цифра – 0, число трёхзначное.

Ответ: 2457, 2458 +

Задание 1.

Представим весь путь от Киева до Мурома так:



За некоторое время n Настасья проходит путь l_1, а Илья — $l_2+l_3+l_4$

Следующие 6 часов Настасья проходит путь l_2.

~~Следующ~~ После этого оставшиеся пути l_1 для Ильи и l_3+l_4 для Настасьи равны.

За следующий час Илья проходит l_1, а Настасья — l_3.

Можно заметить, что одинаковый путь l_1 они проходят за разное время. Тогда:

$$\left.\begin{matrix} v_1\cdot n = l_1 \\ v_2\cdot 1ч = l_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_1\cdot n = v_2\cdot 1ч \Rightarrow v_2 = \frac{nv_1}{1ч} = nv_1\,\frac{км}{ч}$$

(скорость Ильи в n раз больше скорости Настасьи)

Общее время t для них:

$t_1 = n + 6ч + n = 2n + 6ч$

$t_2 = 1ч + n = n + 1ч$

Нужное нам время обозначим за x. Т.к. $l_3+l_4=l_1$, и скорость v_1 не изм., ~~то~~ то и время прохождения этих участков не изм.

$14+x=n \Rightarrow x=n-14$

Путь оба проходят одинаковый.

$t_1=\frac{S}{v_1}$ $\qquad$ $t_2=\frac{S}{v_2}=\frac{S\cdot 14}{n v_1}$

$t_1-t_2=\frac{S}{v_1}-\frac{S\cdot 14}{n v_1}=2n+6-(n+1)$

$\frac{Sn-S}{nv_1}=n+5$

$\frac{S(n-1)}{nv_1}=n+5$

$\frac{t_1(n-1)}{n}=n+5$

$(2n+6)(n-1)=(n+5)n$

$2n^2-2n+6n-6=n^2+5n$

$n^2-n-6=0$

$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25, \sqrt{D}=5$

$n=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm 5}{2}$, $n_1=\frac{6}{2}=3$ (время не может быть отрицательным)

$n_2=\frac{-4}{2}=-2$ — пост. корень

$x=n-1=3-1=2$

Ответ: $x=2$ часа