ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101782898575

Титульный лист

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия КАЙЛЬ

Имя ЛЕВ

Отчество ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 09 09 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И-503

Телефон +79530077689

Дата 05 02 2024 **Подпись** Л. Кейл

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101782898575

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	25	25	19						
Балл члена жюри №2	00	25	25	19						

Итоговый балл 069

Подпись члена жюри №1 Што

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1

$512 = 2^9$

$2048 = 2^{11}$.

Пусть $(i; j)$ - ~~координаты квадрата в i строке j столб~~ сумма квадрата в i строке j столбце.

Можно ~~посчитать~~ посчитать сумму во всей таблице. Для этого посчитаем: $S = \sum_{i=1}^{i\le 512} \sum_{j=1}^{j\le 2048} (i; j) \,|\, i \vdots 2$ и $j \vdots 2$. Таких квадратов равно:

$\frac{2^9}{2} \cdot \frac{2^{11}}{2} = 2^{18}$, в каждом сумма равна $64 \Rightarrow S = 2^{18} \cdot 64 = 2^{18} \cdot 2^6 = 2^{24}$

Т.к. каждая клетка посчитана 1 раз, то чтобы найти сумму по периметру достаточно вычесть сумму „внутр." части, т.е $S' =$

$S' = \sum_{i=2}^{i\le 512} \sum_{j=2}^{j\le 2020} (i; j) \,|\, i \vdots 2$ и $j \vdots 2$. По горизонт. таких квадратов равно

$\frac{2^{11}}{2} - 1$, по вертикали: $\frac{2^9}{2} - 1 \Rightarrow$ всего квадратов „внутренних" $(2^8-1)(2^{10}-1)$ 4

$\cancel{= 2^{19} - 2^{11} - 2^8 + 1}$. Т.к. в каждом сумма 64, ~~то сумма всех кв~~

то $S' = (2^8-1)(2^{10}-1) \cdot 2^6 = 2^{24} - 2^{14} - \cancel{2^{16}} + \cancel{2^6}$. Сумма по периметру:

$S - S' = 2^{24} - (2^{24} - 2^{14}) = 2^{14}$ ⊖

Ответ. 2^{14}.

Заметим, что в решении квадраты не пересекаются (т.к. разница по коорд. ≥ 2), отсюда ясно, что каждая клетка учитывается.

№4 (прод.)

Если пары упорядочены, то ответ: $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$

№3

~~Воспользуемся формулой числа сочетаний с повторениями~~

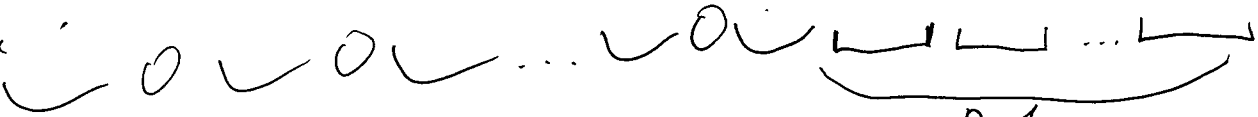
Т.к. фишки одинаковые, то воспользуемся методом шаров и перегородок. Сперва решим задачу, если в каждой лунке ≥ 1 шарик. Т.к. все шары должны быть использованы, то вариантов выбрать их ровно C_{n+1}^{k-1}, где k - кол-во лунок, n - кол-во шаров. (пусть p - кол-во перегородок)

„Перегородка" ставится между шарами, таких мест $n+1$.

Для учёта того, что в некот. группах может быть 0 шаров, добавим $p-1$ „фиктивное" место для перегородок. Т.е. если перегородка ставится в это место, то в группе 0 шаров. ~~Т.к. ∃ группа, в которой~~

Т.к. Σ шаров по всем группам равна n, т.е. каждый шар используется, то $\exists 1$ перегородка стоит не на „фиктивном" месте $\Rightarrow$ на „фиктивных" местах стоит $\leq p-1$ перегородка.

~~Тогда~~



$p-1$

Тогда кол-во способов расст. перегородки ровно $C_{n+1+(k-1-1)}^{k-1} = C_{n+k-1}^{k-1}$

Для данной задачи: C_{41}^{23}

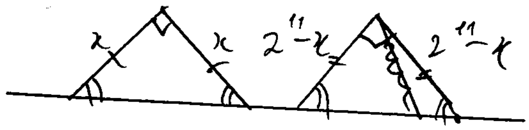
Ответ C_{41}^{23}

(+) 25

№2 $2048 = 2^{11}$.

Пусть сторона 1-ого треугольника — x.

~~Тогда стороны второго равн~~



Т.к. углы при осн. равны $45°$, то треуг. равнобедр. Тогда стороны второго равны $\frac{4096-2x}{2} = 2048 - x = 2^{11} - x$. Площадь равнобедр. прямоуг. Δ равна $\frac{a^2}{2}$

Общая площадь треуг $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{(2^{11}-x)^2}{2} = \frac{(x-2^{11})^2 + x^2}{2} =$

$= \frac{2x^2 - 2^{12}\cdot x + 2^{22}}{2} = x^2 - 2^{11}x + 2^{21}$.

Заметим, что $f(x)$ — парабола, ветви направлены вверх. Тогда её минимум находится в её вершине. Абсцисса вершины: $-\frac{b}{2a} =$

$= \frac{2^{11}}{2} = 2^{10}$. Значение в вершине: $f(2^{10}) = 2^{20} - 2^{11}\cdot 2^{10} + 2^{21} = 2^{20} \cancel{-2^{21}} \cancel{+2^{21}} =$

$= 2^{20}$.

+ 25 б

Ответ. 2^{20}.

№4

~~1) 101 = 1 · 13~~.

~~1) 101 = 7 · 13·7~~

Очевидно если $a \cdot b = x$, то $a = \frac{x}{b}$, $\begin{cases} x \vdots a \\ x \vdots b \end{cases}$

1) $101 = 7 \cdot 13$ (если пары упор., то $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 4$)

$101 = 1 \cdot 101$ $(1; 101) = 1$

$101 = 7 \cdot 13$ $(7; 13) = 1$. $\Rightarrow$ красота $= 2$

Здесь и далее считаем пары чисел $(a; b)$ неупор., то есть $(a; b) \Leftrightarrow (b; a)$

г) Пусть x — число с максимальной красотой. Всего простых делителей у числа не более 4 (иначе $x \geqslant 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 1024$).

Тогда $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4}$ $(p_i \in \mathbb{P},\ \alpha_i \in (\mathbb{N} \cup \{0\}))$. Заметим, что ~~если (брать некр~~ если взять некоторый $a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} p_4^{\beta_4}$, то β_i выполняется следующ: $\left[\begin{array}{l} \alpha_i = \beta_i \\ \beta_i = 0 \end{array} \right.$ (*) для $1 \leq i \leq 4$. Если это не так, то $\exists \beta_i : \alpha_i \neq \beta_i$ и и $\beta_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 4$. ~~Тогда $\frac{x}{a} \vdots \frac{p_i^{\alpha_i}}{p_i^{\beta_i}} \Rightarrow x \vdots \frac{p^{\alpha_i}}{p^{\beta_i}} = p_i^{\gamma_i} \Rightarrow x \vdots p_i$~~

Тогда $b = \frac{x}{a} \vdots \frac{p_i^{\alpha_i}}{p_i^{\beta_i}} \Rightarrow b \vdots p_i^{\gamma_i}$ $(1 \leq i \leq 4)$ $(\gamma_i \geqslant 1)$. Но т.к. $\beta_i \neq 0$, то $a \vdots p_i^{\beta_i} \Rightarrow (a; b) \geqslant p_i \neq 1$?! $\Rightarrow$ (*). Отсюда можно сделать вывод, что степень вхождения простого числа ($\neq 1$) не влияет на красоту числа.

Тогда макс. число $a \leq 1024$ и с макс. числом простых делителей — $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

+ 198

Переберём число a. Б.О.О. кол-во множ. в „a" $\leq$ кол-во множ. в „b", т.к. пары неупор. $\Rightarrow$ ~~хорошие пары~~ ($a \in \{1; 2; 3; 5; 7; 2 \cdot 3; 2 \cdot 5; 2 \cdot 7; 3 \cdot 5; 3 \cdot 7; 5 \cdot 7\}$. $\Rightarrow$ 11 красивых пар.

См. прод. на стр. 4