ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101017891296

Титульный лист

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия БЕЛАЛЫ

Имя АЛЕКСАНДР

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 12 12 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И-405

Телефон +79025873599

Дата 05 02 2024 **Подпись** [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101017891296

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	00	00	09						
Балл члена жюри №2	25	00	00	09						

Итоговый балл 034

Подпись члена жюри №1 Што

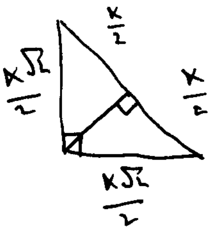
Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 2.

Рассмотрим гору с основанием X. Углы при основании равны 45, а по сумме углов треугольника третий угол равен 90°. Тогда гора это равнобедренный прямоугольный треугольник. Тогда высота также является медианой и биссектрисой.



Пусть катеты равны a, тогда по теореме Пифагора $x^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Медиана в прямоугольном треугольнике равна половине гипотенузы, т.е $\frac{x}{2}$.

Медиана и высота совпадают, т.к. треугольник равнобедренный.

Тогда площадь горы равна $\frac{\frac{x}{2}\cdot x}{2} = \frac{x^2}{4}$. На рисунке будет 2 горы, пусть у одной основание x, у другой y. Тогда по условию $x+y=4096$, площадь гор равна $\frac{x^2+y^2}{4} = \frac{(x+y)^2-2xy}{4}$. Для минимизации площади надо максимизировать произведение оснований, т.е xy, т.к. $(x+y)^2$ – const, 4 – const, xy со знаком минус, поэтому чем больше xy, тем меньше площадь.

Пусть $a+b = c+d = S$, причём $a > c > d > b$.

Докажем, что $ab < cd$

$ab < cd \Rightarrow a(S-a) < c(S-c) \Rightarrow aS - a^2 < cS - c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S(a-c) < a^2 - c^2 \Rightarrow S(a-c) < (a-c)(a+c) \Rightarrow (a-c)(S-(a+c)) < 0$

Заметим, что $a+c > S$, иначе $a+c+b+d > 2(a+c)$, но $2(a+c) < 2S$ противоречие $\Rightarrow a+c > S$. Тогда $(a-c)(S-(a+c)) < 0$ выполняется, т.к. $a>c \Rightarrow a-c>0$, $S-(a+c)<0$.

Для максимизации xy надо сблизить x и y, то есть $x=y=\frac{4096}{2}=2048$.

Тогда площадь гор $= \frac{x^2+y^2}{4} = \frac{2048^2+2048^2}{4} = \frac{2^{22}+2^{22}}{4} = 2^{21}$

Ответ: минимальная площадь гор равна 2^{21} условных единиц

Задание 4.

-1 4 б

1) 101 – простое число, поэтому произведение чисел ab будет равно 101, если одно из чисел 1, а второе 101. Если пара (a, b) и пара (b, a) считаются как 2 пары, а не как одна, то красота числа 101 равна 2, иначе 1.

2) НОД (a, b) по условию равен 1, тогда все вхождения простого числа p в число X должны быть в одном из чисел a, b. Тогда для подсчёта красоты неважно, ~~[illegible]~~ двоек содержится 1 или целых 100. Однако важно, что бы различных простых было как можно больше. Для максимизации количества различных простых, надо минимизировать их степени, т.е. сделать равными 1, и минимизировать сами простые. Тогда число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ будет самым красивым. ($210 \cdot 11 > 1024$ => больше других простых нельзя добавить). В число a мы либо берём 2, либо не берём. Аналогично с другими простыми. Поэтому красота числа 210 будет $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, если (a, b) и (b, a) различные пары, иначе красота 8.

Ответ: 1: 2 (или 1, смотря как понимать условие, но вопросов задавать нельзя); 2: 16 (или 8, смотря как понимать условие, но вопросов задавать нельзя).

± 5 б

Задание 3.

Введём обозначение Δ_n^k. Δ_n^k — это число из n-ого ряда треугольника Паскаля на k-ом месте.

1. 1
2. 1 1
3. 1 2 1
4. 1 3 3 1
5. 1 4 6 4 1

Например: $\Delta_5^3 = 6$, $\Delta_4^2 = 3$, $\Delta_1^1 = 1$.

Тогда количество вариантов стартовых позиций равно:

$$C_{24}^1 \cdot \Delta_{18}^1 + C_{24}^2 \cdot \Delta_{18}^2 + C_{24}^3 \cdot \Delta_{18}^3 + \dots + C_{24}^{17} \cdot \Delta_{18}^{17} + C_{24}^{18} \cdot \Delta_{18}^{18}.$$

Каждая C обозначает количество способов выбрать ~~непустые лунки~~ лунки, в которых будут фишки, а каждый Δ обозначает количество способов распределения фишек между выбранными лунками.

Ответ: количество стартовых позиций равно $C_{24}^1 \cdot \Delta_{18}^1 + C_{24}^2 \cdot \Delta_{18}^2 + C_{24}^3 \cdot \Delta_{18}^3 + \dots + C_{24}^{17} \cdot \Delta_{18}^{17} + C_{24}^{18} \cdot \Delta_{18}^{18}$.

−

Задание 1.

Пусть мы знаем ответ для таблицы $2^k \cdot 2^{k+2}$ и пусть этот ответ равен 4K. Найдём ответ для таблицы $2^{k+1} \cdot 2^{k+3}$.

Соединим 4 таблицы $2^k \cdot 2^{k+2}$ и получим таблицу $2^{k+1} \cdot 2^{k+3}$.

Чтобы получить окончательный ответ надо избавиться от клеток на строках 2^k и 2^k+1, столбцов со 2 по $2^{k+3}-1$, от клеток на столбцах 2^{k+2} и $2^{k+2}+1$ строк со 2 по $2^{k+1}-1$. Тогда у нас останется периметр который мы учли и удалённый центр $2 \cdot 2$, поэтому для ответа добавим его. Таким образом ответ для таблицы $2^{k+1} \cdot 2^{k+3}$ равен

$$64\left(4K - \frac{2^{k+1}-2}{2} - \frac{2^{k+3}-2}{2} + 1\right)$$

Несложно заметить, что для таблицы $2 \cdot 8$ ответ $64 \cdot 4$. Ответ для таблицы $4 \cdot 16$ будет равен $64\left(4 \cdot 4 - \frac{16-2}{2} - \frac{4-2}{2} + 1\right) = 64 \cdot 9$.

Ответ для таблицы $8 \cdot 32$ будет $64 \cdot \left(4 \cdot 9 - \frac{32-2}{2} - \frac{8-2}{2} + 1\right) = 64 \cdot 19$

Ответ для таблицы $16 \cdot 64$ будет $64 \left(4 \cdot 19 - \frac{64-2}{2} - \frac{16-2}{2} + 1\right) = 39 \cdot 64$

Ответ для таблицы $32 \cdot 128$ будет $64 \left(4 \cdot 39 - \frac{128-2}{2} - \frac{32-2}{2} + 1\right) = 79 \cdot 64$

Ответ для таблицы $64 \cdot 256$ будет $64 \left(4 \cdot 79 - \frac{256-2}{2} - \frac{64-2}{2} + 1\right) = 64 \cdot 159$

Заметим, что для таблицы $2^n \cdot 2^{n+2}$ ответ $2^{n+1} + 2^{n-1} - 1$, где $n \in N$

Докажем это.

База индукции $n=1$ $2^1 \cdot 2^3$ ответ $64(2^2 + 2^0 - 1) = 64 \cdot 4$, верно

Шаг индукции. Пусть для $n=k$ верно, что для таблицы $2^k \cdot 2^{k+2}$ ответ $64(2^{k+1} + 2^{k-1} - 1)$. Докажем для $n = k+1$.

Ответ для таблицы $2^{k+1} \cdot 2^{k+3}$ равен $64\left(4\left(2^{k+1} + 2^{k-1} - 1\right) - \frac{2^{k+3}-2}{2} -\right.$

$\left. - \frac{2^{k+1}-2}{2} + 1\right) = 64\left(2^{k+3} + 2^{k+1} - 4 - 2^{k+2} + 1 - 2^k + 1 + 1\right) =$

$= 64\left(2^{k+3} - 2^{k+2} + 2^{k+1} - 2^k - 1\right) = 64\left(2^{k+2} + 2^k - 1\right) \Rightarrow$ для $n = k+1$ утверждение доказано $\Rightarrow$ верно для всех n.

Тогда ответ для таблицы $512 \cdot 2048$ равен ответу для таблицы $2^9 \cdot 2^{11}$ (таблицы совпадают) и равен $64\left(2^{10} + 2^8 - 1\right) = 64 \cdot 1279 = 81856$

Ответ: сумма чисел в клетках, находящихся по периметру картины $512 \cdot 2048$ равна $64 \cdot 1279 = 81856$

+ 25 б

Бланк ответов