ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101102289695

Титульный лист

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия ТИХОНОВ

Имя ГЛЕБ

Отчество ОЛЕГОВИЧ

Дата рождения 15 03 2007

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Аудитория 229

Телефон 89174585257

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101102289695

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	5	–					
Балл члена жюри №2	20	20	0	5	–					

Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1.

$S = 1+2+\ldots+36 = \frac{36\cdot 37}{2} = 666.$

*Пусть у нас получилось 12 ~~подряд~~ послед-х чисел в рез-те, тогда все строки и столбцы в сумме (т.е $2S$, т.к. каждая клетка посчитается два раза: в своей строке; 2) в своем столбце) будет число вида: $a+(a+1)+(a+2)+\ldots(a+11) = 2\cdot 666$

$12a+(1+\ldots 11) = 12a+66.$

$12a+66 = 2\cdot 666 \quad |:2$

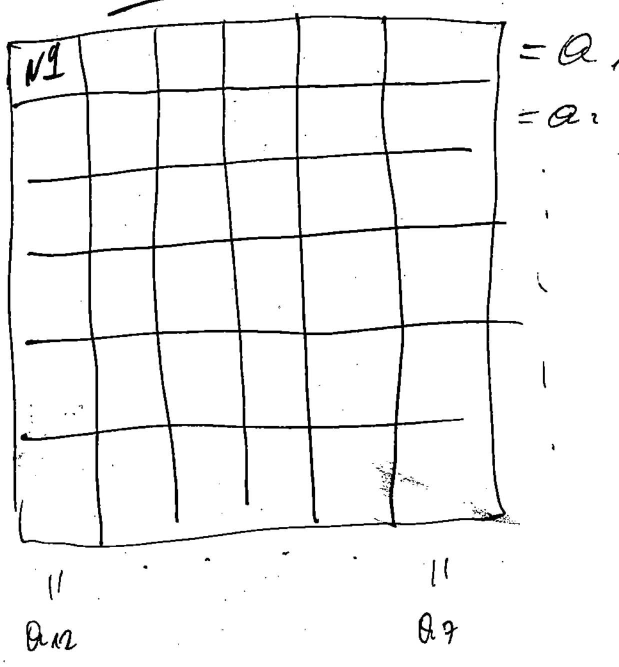
$\underbrace{6a}_{\vdots 6}+\underbrace{33}_{\not\vdots 6} = \underbrace{666}_{\vdots 6}$, т.к. $a\in N$: $(\vdots 6)+(\not\vdots 6) \neq (\vdots 6)$ ↯ $\Rightarrow$ +

(число кратное 6 не может быть получено в рез-те сложения числа кратного 6 и не кратного 6)

предположение неверно.

Ответ: нет.

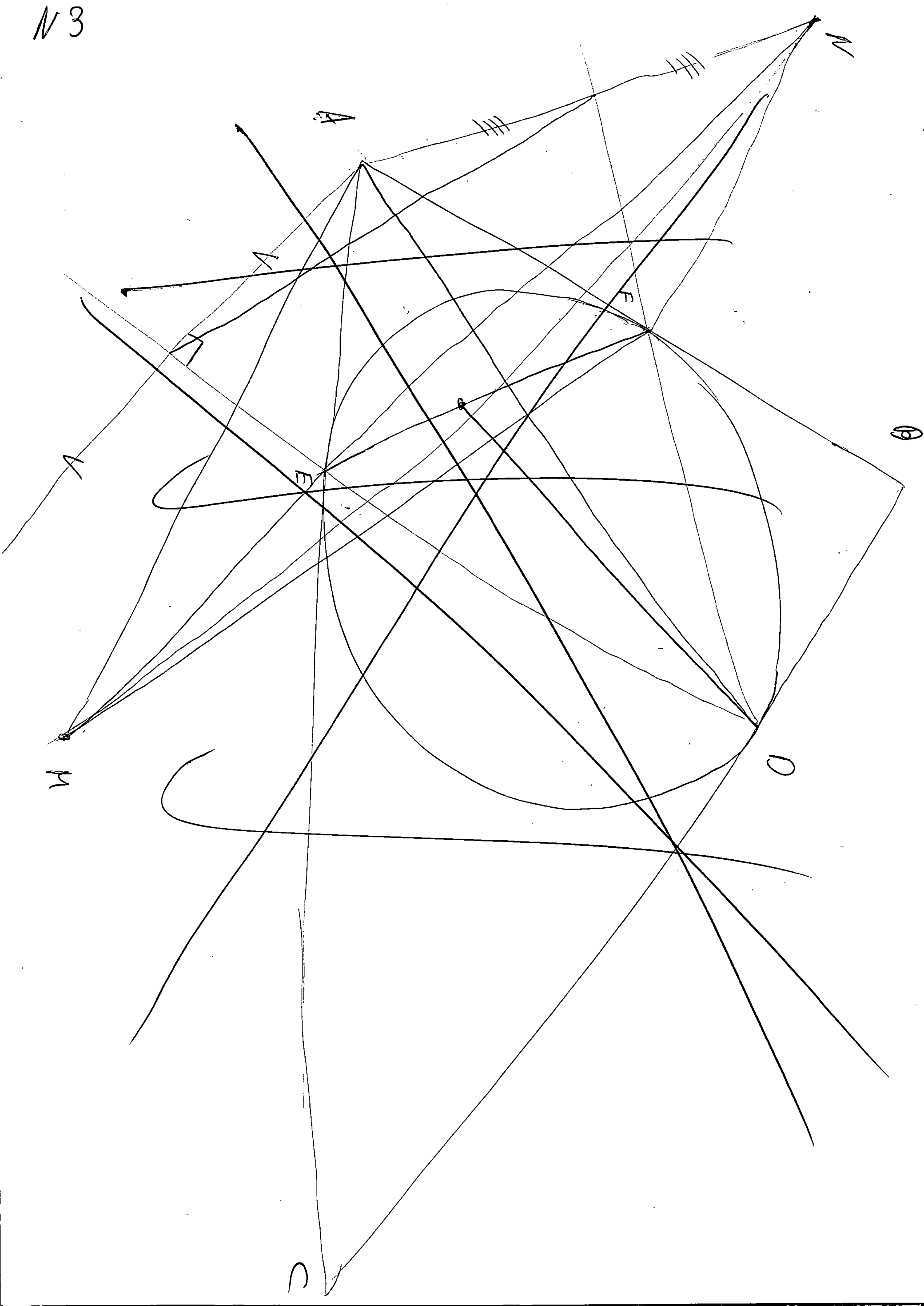
*



$a_1+\ldots a_{12} = a+(a+1)+(a+2)+\ldots(a+11) =$
$= 2(1+2+\ldots+36).$

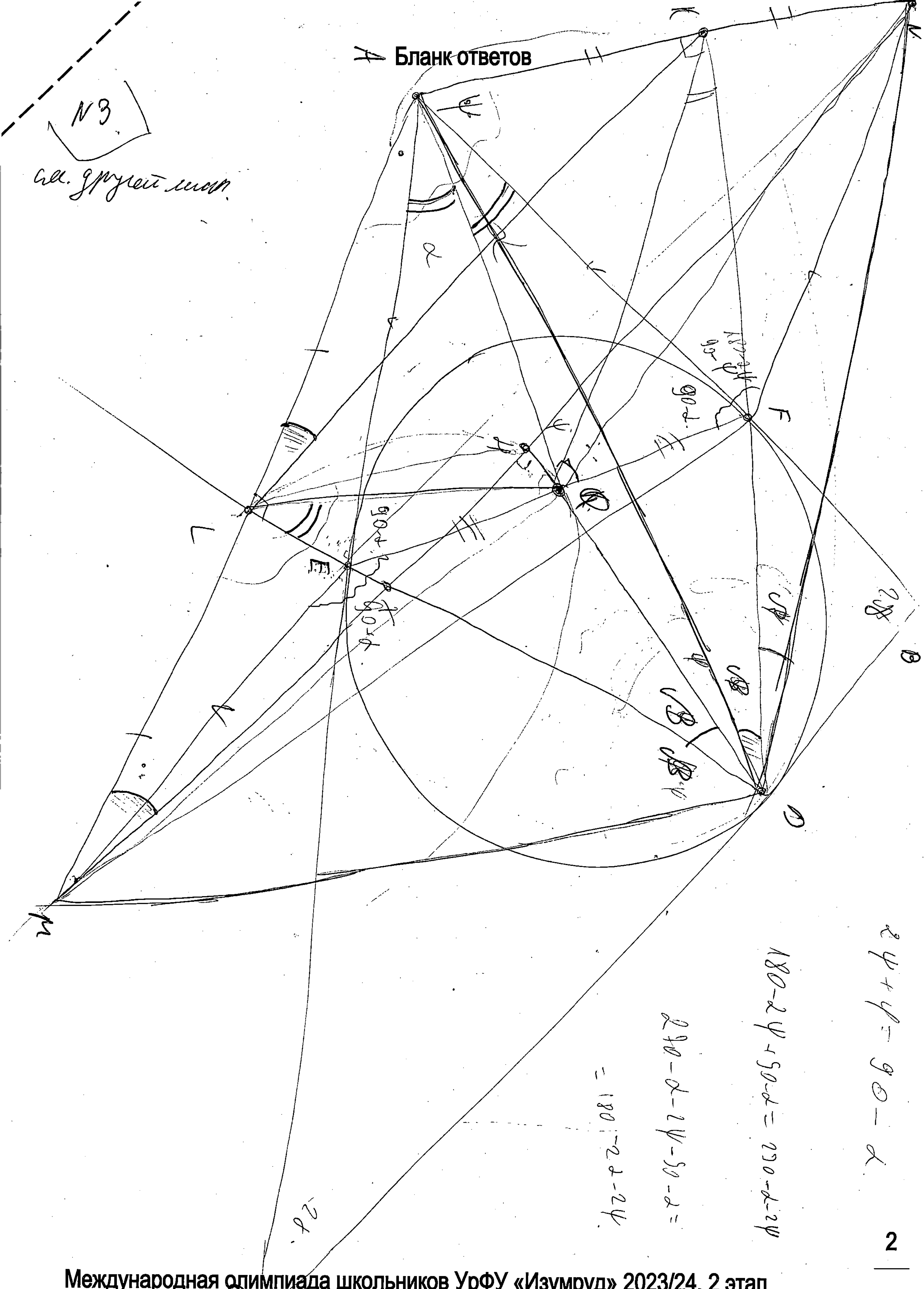
клетка №1 входит и в a_1 и в a_{12}.

№3



№3

см. другой лист.



$2\psi + \psi = 90 - \alpha$

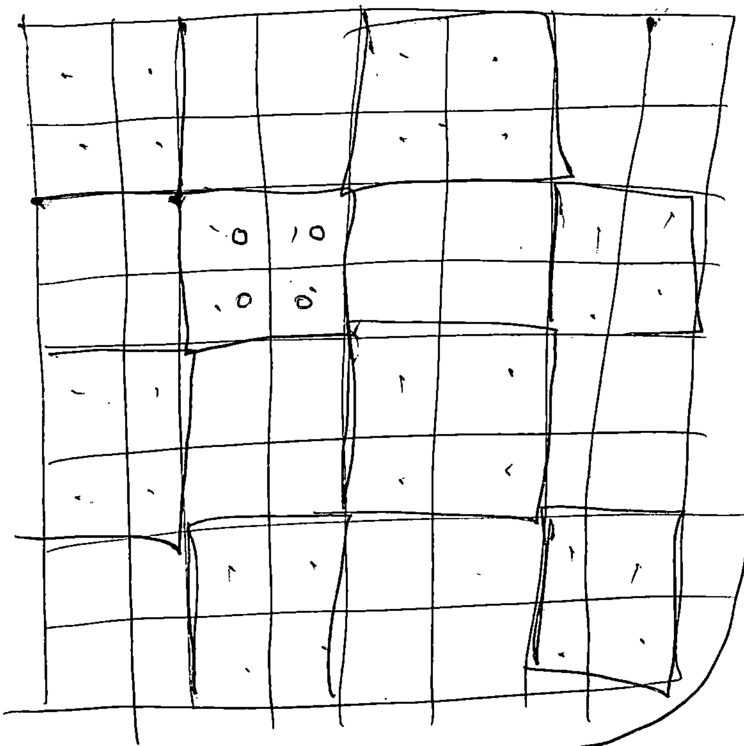
$180 - 2\psi + 90 - \alpha = 270 - \alpha - 2\psi$

$270 - \alpha - 2\psi - 90 - \alpha =$

$= 180 - 2\alpha - 2\psi$

№4 | • есть рабочий пример
• нет оценки

Разобьём доску на чёрные и белые кв-ки 2×2



„[·]" – чёрные

„[ ]" – белые.

если мы поставим вампиров на красные точки, то закроем сразу на 5 одноцв. квадратов, а не 4

Заметим, что на 4 одноцв-х кв-та нужно ≥4 вампиров. Потому что один вампир не может занимать две клетки в одном кв-ке 2×2. Посмотрим сколько всего кв-в 2×2 каждого цвета у нас есть: $64:4=16$; $16:2=8$ – кв-в каждого цвета

и нам останется покрыть 3 одноцв. квадрата, а не 4. Возможно, я умею покрывать 3 квадрата ≤4 вампирами

$8:4=2 \Rightarrow 2\cdot(\geq 4)\geq 8$ – вампиров нужно на один цвет (получим отметили, что вампир, стоящий на какой-либо клетке бьёт только „свой" цвет, т.е тот, на котором он стоит) $(\geq 8)\cdot 2 = \geq 16$ – нужно вампиров на всю доску.

Пример:

X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	~~B~~ X	~~B~~ X	~~B~~ X	~~B~~ X	X	X
X	X	B	B	B	B	X	X
X	X	B	B	B	B	X	X
X	X	B	B	B	B	X	X
X	X	B	B	B	B	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X

Ответ: 16.

Бланк ответов

№2

(для всех i:)

Пусть такой „i“ не нашлось. Тогда: $a_i^2 < 2a_{i+1} - 1$

$\Updownarrow$

$\boxed{a_i^2 + 1 \geq 2a_i}$ ← нер-во Коши. $a_i^2 + 1 < \cancel{2a_{i+1}}\ 2a_{i+1}$

$2a_i \leq a_i^2 + 1 < 2a_{i+1} \Rightarrow a_i < a_{i+1}$, т.е.

$a_1 < a_2$

$a_2 < a_3$

$\vdots$

$a_{2022} < a_{2023}$, но по усл.: $a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1 \iff a_{2023}^2 + 1 \leq 2a_1$.

По нер-ву Коши: $2a_{2023} \leq a_{2023}^2 + 1 \leq 2a_1$; $a_{2023} \leq a_1$, но по нашему предположению: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2022} < a_{2023}$

~~$a_1 < a_{2023}$~~

$a_1 < a_{2023}$ одновременно $a_{2023} \leq a_1$. $\lightning \Rightarrow$

$\Rightarrow$ наше предположение неверно и такая „i“, $1 \leq i \leq 2022$ существует. Ч.Т.Д.

+

№3 решение.

$AF = AE$ (отрезки кас-х из одной точки) $AE = EM$ из симм-ии

$AF = FN$ анал-но $\Rightarrow \underline{NF = EM}$ ✓ Проведем DA, DN, DM; $DA = DN$ из симметрии; $DA = DM$ аналог-но $\Rightarrow \underline{DM = DN}$.

AD–ларгониана

почему AD–симедиана?

$\boxed{\text{Пусть } Q \text{ – середина } EF\text{, тогда из } 1^{\circ}C \text{ (леммы о симедиане)!: } \angle FDA = \angle QDE.}$ ~~∠FA~~ Заметим, что четырех-к $KALD$ – вписан в окр-ть (противол. углы в сумме $180°$) $\Rightarrow \underline{\angle FDA = \angle KLA}$, как

далее решение построено на неверном факте.

вписанные, $KL \parallel MN$ (сред. линия) $\Rightarrow \angle KLA = \angle NMA$ (соотв. при $\parallel$).

$\angle NMA = \angle FDA = \angle QDE = \beta$. Пусть середина NM – H, докажем, что H лежит на DQ: $\angle HXD = \angle LXM = 90 - \beta$. Т.к. $DN = DM$, то $\triangle NDM$ – р/б $\Rightarrow$ DH – высота/медиана, т.е. $\angle DHX = 90 \Rightarrow \angle HDX = 180 - 90 - 90 + \beta = \beta$;

$\angle HDX = \angle XDQ \Rightarrow DQ$ и DH – одна и та же прямая.

Пусть ~~$\angle AFQ = \varphi$~~ $\angle KAF = \psi$; $\angle FAQ = \alpha$, тогда $\angle AFN = 180 - 2\psi$,

$\angle AFE = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha \Rightarrow \angle NFQ = 270 - \alpha - 2\psi$.

~~Пусть~~ $\angle QEC = 180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$; $QL \parallel AN$ (сред. линия) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AQL = \angle QAN$ (накрест. леж.) $= \alpha + \psi$. Т.к. $AQEL$ – вписанный ($90° + 90° = 180°$), то $\angle AQL = \angle AEL$ (впис-е) $= \alpha + \psi \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CEM = 180 - 2 \cdot (\alpha + \psi) = 180 - 2\alpha - 2\psi = \angle CEM$.

$\angle CEQ + \angle MEC = 180 - 2\alpha - 2\psi + 90 + \alpha = 270 - \alpha - 2\psi =$

$= \angle NFQ \Rightarrow NF \parallel EM$, но $NF = EM \Rightarrow NFME$ – пар-м.

(Из этой задачи также следует впис-ть $MLQD$, а точки Q и H вовсе совпадут как т. пересеч. д-й пар-ма, а док-во впис-ти $MLQD$ было отдельной задачей, где как раз и надо было воспользоваться параллелограммностью $MENF$)

Ч.Т.Д.