ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101094908475

Титульный лист

Направление	☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11
Фамилия	ГОЛОТИН
Имя	ТИМУР
Отчество	АЛЕКСАНДРОВИЧ
Дата рождения	06 01 2007
Город участия	ЧЕЛЯБИНСК
Аудитория	259
Телефон	+79049730191
Дата	05 02 2024
Подпись	

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101094908475

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 18:13 до 18:15

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	21	00	25	01						
Балл члена жюри №2	21	00	25	01						

Итоговый балл 047

Подпись члена жюри №1 [illegible]

Подпись члена жюри №2 Шоб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№ 1.1

Допустим, что верхний левый квадрат заполнен числами следующим образом: $\begin{matrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{matrix}$, $\begin{cases} a+b+c=32 \\ i+j+k=32 \\ x+y+z=32 \\ a+i+x=32 \\ b+j+y=32 \\ c+k+z=32 \end{cases}$, тогда рассмотрим дальнейшее

заполнение первой строки. пусть четвёртый элемент $=n'$, тогда $b+c+n'=32$
$\begin{cases} b+c+n'=32 \\ a+b+c=32 \end{cases} \Rightarrow n'=a$. пусть пятый элемент $=m'$, тогда $c+a+m'=32$, т.е.

$\begin{cases} c+a+m'=32 \\ a+b+c=32 \end{cases} \Rightarrow m'=b$. пусть шестой элемент $=l$, тогда $a+b+l=32$, т.е.

$\begin{cases} a+b+l=32 \\ a+b+c=32 \end{cases} \Rightarrow l=c$. таким образом последовательность $a\,b\,c$ будет продолжаться до самого конца строки. Аналогично для всех остальных строк и столбцов.

Рассмотрим сумму первой строки. $\frac{256}{3}=85$ (ост. 1) $\Rightarrow$ 85 раз повторится последовательность $a\,b\,c$ и ещё в самом конце будет стоять её первый элемент, т.е. a. Т.к. $a+b+c=32$ получаем сумму $85\cdot32+a$. Т.к. $1024\equiv1 \pmod 3$, что последняя строка повторяет первую, т.е. её сумма $=85\cdot32+a$.

Рассмотрим сумму первого столбца. $\frac{1024}{3}=341$ (ост. 1) $\Rightarrow$ 341 раз повторится последовательность $a\,i\,x$ и ещё в самом конце будет стоять её первый элемент, т.е. a. Т.к. $a+i+x=32$, что получаем сумму $341\cdot32+a$. Т.к. $256\equiv1 \pmod 3$, что последний столбец повторяет первый, т.е. его сумма $=341\cdot32+a$.

Каждый из угловых элементов был подсчитан по 2 раза: в строке и столбце, к которому он принадлежит. левый верхний $=a$. первая строка повторяет последнюю, значит левый нижний тоже $=a$. первый столбец повторяет последний значит правый верхний $=a$ и правый нижний $=a$, т.е. мы 2 раза посчитали $a+a+a+a$, тогда итоговая сумма: $(85\cdot32+a)+(85\cdot32+a)+(341\cdot32+a)+(341\cdot32+a)-(a+a+a+a)$ $=85\cdot32+85\cdot32+341\cdot32+341\cdot32=(85+85+341+341)\cdot32=852\cdot32=27264$. Ответ: 27264

+ 5 б

№ 1.2

Рассмотрим сумму первой строки: $\frac{503}{3}=167$ (ост. 2) $\Rightarrow$ её сумма $=167\cdot(32)+a+b$. Т.к. $1024\equiv2 \pmod 3 \Rightarrow$ последняя строка состоит из $i\,j\,k$, а её сумма $=167\cdot32+i+j$.

см. обор.

Рассмотрим сумму первого столбца: $\frac{2024}{3} = 674$ (ост. 2) $\Rightarrow$ его сумма $= 32 \cdot 674 + a + i$. Т.к. $503 \equiv 2 \pmod 3$, то последний столбец состоит из $в\ j\ j$, его сумма $= 32 \cdot 674 + в + j$. Угловые клетки были посчитаны 2 раза, а именно левая верхняя $= a$, левая нижняя $= i$ (т.к. $2024 \equiv 2 \pmod 3$), правая верхняя $= в$ (т.к. $503 \equiv 2 \pmod 3$), правая нижняя $= j$ (т.к. $2024 \equiv 2 \pmod 3$) $\Rightarrow$ итоговая сумма:

$(167 \cdot 32 + a + в) + (167 \cdot 32 + i + j) + (674 \cdot 32 + a + i) + (674 \cdot 32 + в + j) - (a + в + i + j) =$

$= 167 \cdot 32 + 167 \cdot 32 + 674 \cdot 32 + 674 \cdot 32 + a + в + i + j = (167 + 167 + 674 + 674) \cdot 32 + a + в + i + j =$

$= 1682 \cdot 32 + a + в + i + j = 53824 + a + в + i + j$. т.к. один из уголков отсутствует, то сумма будет

Ответ: $\left[\begin{array}{l} 53824 + a + в + i \\ 53824 + a + в + j \\ 53824 + a + i + j \\ 53824 + в + i + j \end{array}\right.$

$\pm$ 188

№ 4.1

$\gcd(1,8) + \gcd(2,9) + \gcd(3,10) + \gcd(4,11) + \gcd(5,12) + \gcd(6,13) + \gcd(7,14) + \gcd(8,15) + \gcd(9,16) + \gcd(10,17) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 7 + 1 + 1 + 1 = 16$ $+1$ Ответ: 16

№ 3

Рассм. функцию $s(x)$. Представим её результат в виде двоичного числа. Если к числу прибавить двоичному 2^x, то по сути x-ая цифра увеличится на 1, а т.к. P — перестановка, то все x различны, т.е., что результат функции $s(x)$ — двоичное число, у которого i-ая цифра $= 1$, если i-ая верш. графа $\in$ циклу, 0 иначе. Т.к. граф ориентированный и из каждой вершины исходит ровно 1 ребро, то каждая вершина либо не принадлежит циклу, либо принадлежит ровно одному циклу $\Rightarrow$ Если i-ый элемент не в цикле, то для всех $s(x), x \in C(P)$ i-ая цифра в двоичной записи $= 0$. Иначе ровно в одном $s(x), x \in C(P)$ i-ая цифра в двоичной записи будет $= 1$, во всех остальных $= 0$.

Пусть A — двоичное представление $g(P)$, тогда если вершина i не принадлежит циклу, то i-ая цифра $A = 0$, т.к. $0 \text{ xor } 0 \text{ xor } \ldots \text{ xor } 0 = 0$ (т.к. $0 \text{ xor } 0 = 0$). Если же i — в цикле, то:

$\underbrace{0 \text{ xor } 0 \text{ xor} \ldots \text{ xor } 0}_{0} \text{ xor } 1 \underbrace{\text{ xor } 0 \text{ xor } 0 \text{ xor} \ldots \text{ xor } 0}_{0} = 0 \text{ xor } 1 \text{ xor } 0 = 1 \text{ xor } 0 = 1$, т.е. xor нескольких нулей и одной единицы $= 1$, следовательно i-ая цифра $A = 1$.

Каждое ребро исходит из номера i в число под номером i в перестановке, а т.к. номера и числа — уникальны, то в каждую вершину входит ровно 1 ребро и исходит ровно 1 ребро. Если есть последовательность, не являющаяся циклом, то есть вершина, в которую ничего не входит, и вершина, из которой ничего не исходит — начало и конец последовательности. Это противоречит условию $\Rightarrow$ каждая вершина принадлежит циклу $\Rightarrow$ все цифры $A = 1$ (кроме 0-го, т.к. не сущ. 0-го элем.)

Бланк ответов

№3 (продолжение)

Получается, что для любой перестановки $g(P) = 2^1+2^2+...+2^n$. Всего перестановок существует $n!$. При $n=1$ xor всех g по всем перестановкам будет 2 (т.к. сущ. единств. перест.: {1}. единственное ребро идёт из 1 в 1, т.е. единств. цикл: {1}. для него $S(x) = 2^1 = 2$, а т.к. он единств., то $g(P) = 2$ и xor всех $g(P) = 2$.

При остальных n:

Пусть $B - g(P)$, т.к. все они одинаковые, то обозначим их одной переменной. В двоичной записи $B = \underbrace{111...11}_{n}0$. т.е. для всех цифр, кроме нулевой xor = 1 xor 1 xor 1 xor ... xor 1. Поэтапно сократим след. выражение:

1 xor 1 xor 1 xor 1 xor 1 = 0 xor 1 xor 1 xor 1 = 1 xor 1 xor 1 = 0 xor 1 = 1. Видно, что на нечётных шагах мы получаем 1, а на чётных 0, т.е. xor нескольких единиц = 1, если их нечётное кол-во, 0 иначе. При $n \geq 2$: $n!$ всегда чётный (т.к. присутствует множитель 2) => xor для всех цифр, кроме нулевой = 0.

Для нулевой цифры получаем выражение 0 xor 0 xor 0 xor ... xor 0 = 0.

Получается, что все цифры итогового ответа = 0, т.е. ответ – 0

Ответ: 0 при $n > 1$

2 при $n = 1$

+25б

Бланк ответов