ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101931350697

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия РАМАЗАНОВ

Имя ЭМИЛЬ

Отчество АЛИКОВИЧ

Дата рождения 27 02 2007

Город участия УФА

Аудитория 9101

Телефон +79276361542

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101931350697

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия Уфа

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	5	–					
Балл члена жюри №2	20	20	20	5	–					

Итоговый балл 65

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1

Найдем сумму чисел во всей таблице.

$1+2+\ldots+36 = \frac{(1+36)\cdot 36}{2} = 37\cdot 18 = 666$

Тогда все эти 12 последовательных сумм дают в точности сумму всех. Эти 12 последовательных сумм имеют вид:

$n+1, n+2, n+3, \ldots, n+12 = \frac{(2n+13)\cdot 12}{2} = 666$ 111

$2n = 98 \Rightarrow n = 49$ и значит такая последовательность единственна. Максимальное в ней равно 61.

Рассмотрим 7 чисел набора.

36, 35, 34 ... 31, 30. Их 7, а столбцов и строк всего по 6, но тогда по принципу Дирихле, какие-то 2 из этих чисел попадут в одну строку/столбец. Но минимальная сумма двух чисел из набора – 61. И при том в строке/столбце есть еще и другие ~~натуральные~~ числа ≥ 1. Значит в такой строке/столбце сумма ≥ 62. А максимальное возможное, чтобы образовалась последовательность – 61. Противоречие. Значит так заполнить доску нельзя

Ответ: нельзя

№ 1

Последовательность всех сумм имеет вид:

$n+1, n+2 \ldots \quad n+12 = \frac{(2n+13)\cdot 12}{2}$

Если сложить все эти суммы по горизонтали и вертикали, то мы получим удвоенную сумму всех чисел таблицы. ~~⇒~~ сумма всех чисел таблицы $1+2+\ldots+36 = \frac{(1+36)\cdot 36}{2} = 37\cdot 18 = 666$.

Тогда $\frac{(2n+13)\cdot 12}{2} = 2\cdot 666$

$2n+13 = 222$. $2n = 209 \Rightarrow n$ — нецелое, но числа изначально все целые. Противоречие. Тогда ~~каждая~~ расставить так числа не удастся

Ответ: нельзя.

+

№ 2

~~Допустим~~ Предположим противное: не нашлось таких i, что $a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1$. Тогда для всех ~~все~~ $1 \leq i \leq 2022$

$a_i^2 < 2a_{i+1} - 1$. Тогда:

$a_1^2 < 2a_2 - 1$

$a_2^2 < 2a_3 - 1$

$a_3^2 < 2a_4 - 1$

$\vdots$

$a_{2022}^2 < 2a_{2023} - 1$ — Складывая все, получим:

$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2022}^2 < 2a_2 + 2a_3 + \ldots + 2a_{2023} - 2022.$

$a_1^2 + (a_2-1)^2 + (a_3-1)^2 + \ldots + (a_{2022}-1)^2 < 2a_{2023} - 1. \quad (1)$

4

Но также правда, что:

$a_{2023}^2 \le 2a_1 - 1$. – и это неравенство можно сложить с (1).

$a_1^2 + a_{2023}^2 + (a_2-1)^2 + (a_3-1)^2 + \ldots + (a_{2022}-1)^2 < 2a_{2023} - 1 + 2a_1 - 1.$

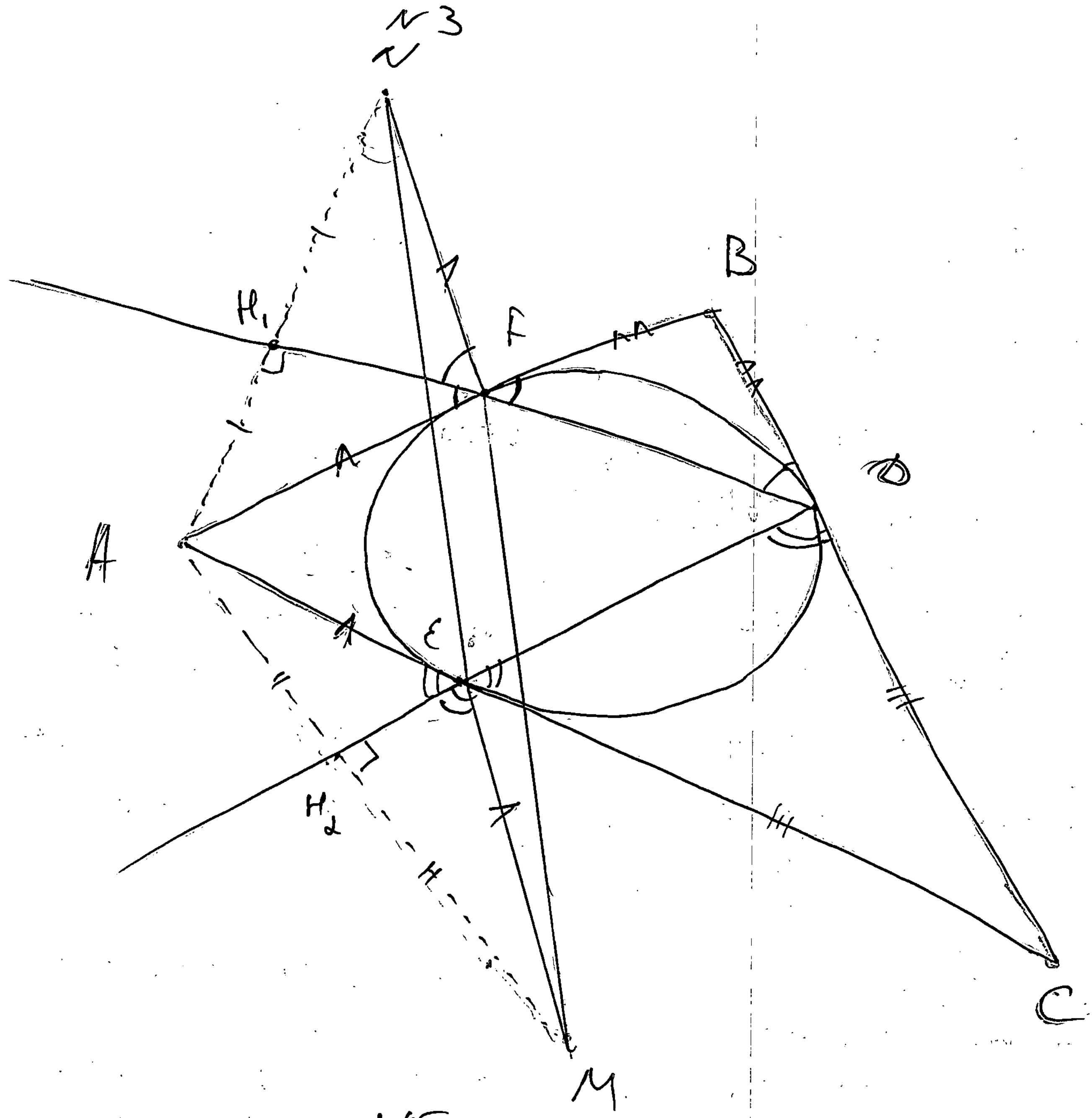
$(a_1-1)^2 + (a_2-1)^2 + (a_3-1)^2 + \ldots + (a_{2023}-1)^2 < 0.$

Но получается, что сумма квадратов должна быть отрицательна. Такого не бывает. Получаем противоречие к предположению, а значит найдется такое $1 \le i \le 2022$, что

$a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1$ ч. т. д.

+

* Складывать строгое и нестрогое неравенство, очевидно можно. Неверным оно от этого ~~не~~ стать не может, достижение равенства равносильно прибавлению к обеим частям нер-ва ~~как~~ одного и того же числа. В остальном ситуация схожа ~~прибавлении~~ сложению двух строгих.



~~BE=BD => ∠FBD~~ ($AF=NF$)

A — симметр. N => △ANF р/б т.к. высота совпадает с медианой. $H_1 = AN \cap DF$ => FH_1 — бисс.

$\angle BFD = \angle H_1FA$ (вертик.) ~~=> ∠AFH₁ = ∠BFD~~

$\angle NFH_1 = \angle H_1FA$ (FH_1 — бисс.)

Аналогично $H_2 = AM \cap DE$ => $\angle DEC = \angle AEH_2 =$

$\angle H_2EM =$ ~~[illegible]~~

$AE = EM$ (△AEM — р/б, EH_2 — мед. и высота).

$AE = AF$ (отрезки касательных).

$AF = NF$ => $NF = EM$.

(~~CD = CE как касат. => △CDE р/б~~)

Также $\angle CED = \angle CDE$ ($CD = CE$ как касат. => △CED — р/б).

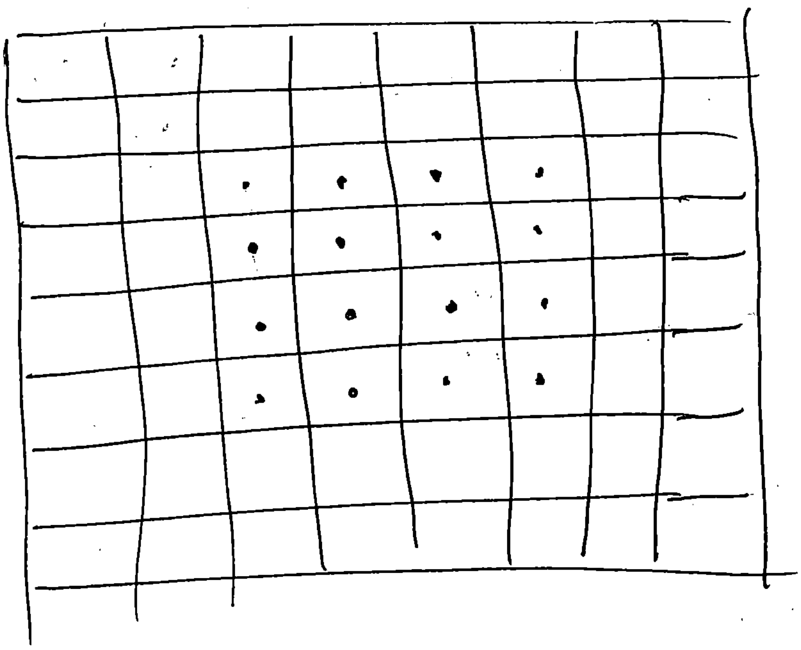
$\angle BDF = \angle BFD$ ($BF = BD$ как касат. => △BFD — р/б).

Но $\angle H_2EM = \angle H_2DC \Rightarrow$ соответственные углы равны $\Rightarrow ME \parallel DC \parallel BC$.

А также $\angle NFH_1 = \angle BDH_1 \Rightarrow$ соотв. углы равны и $NF \parallel BD \parallel BC$. Но тогда ~~[illegible]~~ ME и NF параллельны одной и той же прямой $\Rightarrow$ и параллельны друг другу. Выходит $NF \parallel ME$, $NF = ME \Rightarrow$ $MENF$ пар-грамм ч.т.д. +

№4.

Пример на 16:



Очевидно, все пер удачны.

пример верный оценки нет