ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101372417046

# Титульный лист

| | |
|---|---|
| Направление | ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия |
| Класс | ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11 |
| Фамилия | УРАКОВА |
| Имя | АЛЕКСАНДРА |
| Отчество | МАКСИМОВНА |
| Дата рождения | 27 06 2006 |
| Город участия | ЕКАТЕРИНБУРГ |
| Аудитория | 338 |
| Телефон | +79320162006 |
| Дата | 05 02 2024 |
| Подпись | |

Пример заполнения: А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101372417046

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление** ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

## Заполняется организаторами

Количество доп. листов 1 Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

## Протокол проверки
## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 20 | 20 | 0 | 20 | 20 | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | | | | | |

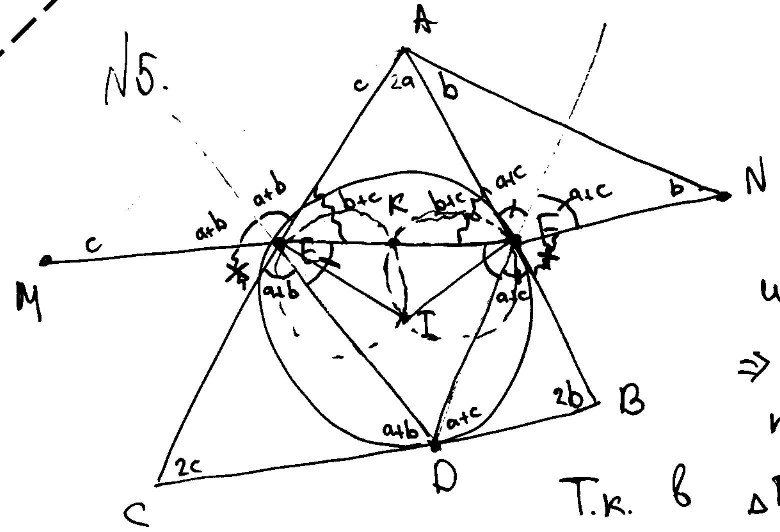
**Итоговый балл** 90

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№5.




Доказать: $K \in MN$

Док-во:

т.к. $\angle EKI = 90^\circ$ (т.к. $EI$ – диаметр) и аналогично $\angle FKI = 90^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle EKI + \angle FKI = 180^\circ \Rightarrow FKE$ – одна прямая $\Rightarrow K \in EF$ +

Т.к. в $\triangle EKI$ и $\triangle FKI$:

$\left.\begin{array}{l} EI = FI \\ KI \text{ – общая} \\ \text{и } \angle EKI = 90^\circ = \angle FKI \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle EKI = \triangle FKI$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow$

$\angle A = 2a$
$\angle B = 2b$
$\angle C = 2c$

$\Rightarrow EK = KF \Rightarrow K$ – середина отрезка $EF$ +

Тогда рассмотрим $\triangle MEK$ и $\triangle NFK$:

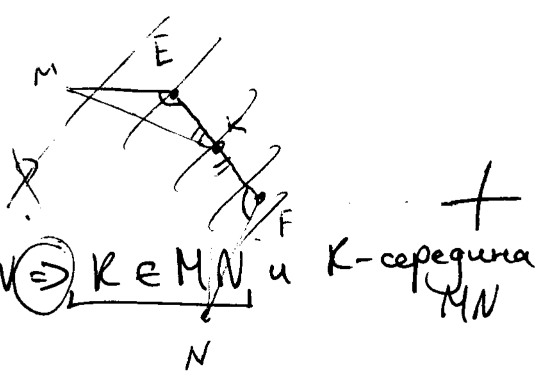
1) $EK = FK$
2) $ME = NF$ (т.к. $ME \underset{\text{из симметрии}}{=} EA \underset{\text{отрезки касательных}}{=} AF \overset{\text{из симметрии}}{=} FN$) +

~~$\angle MEK = \angle NFK$ (на рис. отмечены все равные уголки)~~

$\Rightarrow \triangle MEK = \cancel{\triangle NFK} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow \angle EKM = \angle FKN$~~

3) $\angle MEK = 360^\circ - \angle MEA - \angle AEF =$
$= 4a + 4b + 4c - a - b - a - b - b - c =$
$= 2a + b + 3c = (b+c) + (a+c+a+c) =$
$= \angle EFA + \angle AFN = \angle KFN$




Из 1), 2), 3) $\triangle MEK = \triangle NFK \Rightarrow \angle EKM = \angle FKN \Rightarrow K \in MN$ и $K$ – середина $MN$

№1

Пусть можно, и эти 12 последовательных чисел, это числа: $x, x+1, \dots, x+11$, тогда их сумма:

$12x + 66$

Но заметим, что сумма всех сумм в строках и столбцах это удвоенная сумма всех чисел в квадрате. +

Т.е. $12x+66=(1+\ldots+36)\cdot 2$

$12x+66=666\cdot 2$

$12x=1266$, но 1266 не делится на 12, а x должно быть целым → противоречие ⇒ так числа расставить нельзя

Ответ: нельзя +

№3

Рассмотрим число 1, ~~р~~ оно должно делиться на разность своих соседей ⇒ его соседи - два последовательных ~~чисел~~ числа.

Рассмотрим все пары последовательных чисел от 1 до 8 и поймем, которые из них могут быть соседями 1. Заметим что

2 и 3, 3 и 4, 4 и 5, 5 и 6, 6 и 7, ~~8 и 9~~ 7 и 8. заметим что во всех парах есть простое число ⇒ один из соседей 1 - простое число, т.е.:

p 1 p+1 или p 1 p-1. Заметим, что второй сосед числа - либо 2, либо p+1 ⇒ это выглядит так:

1 случай + (Потерян 1 подслучай)

p 1 p+1

2

2 случай + рассмотрен

1

p p-1

2

3 случай + рассмотрен

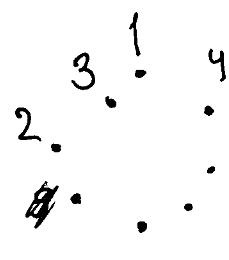
p 1 p+1

p+1

Рассмотрим 1 случай:

пара $\{p;p+1\}$ может быть только $\{3;4\}$, $\{5;6\}$, $\{7;8\}$

1. $\{p;p+1\}=\{3;4\}$



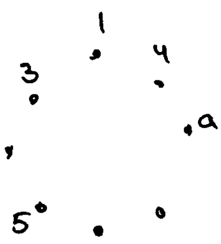

Т.к. 2 и 5 стоят рядом ⇒ второй сосед 2 это 5

4 должно делиться на разность a и 1 ⇒ 2,

⇒ a-1 = 1 или 2 или 4, но

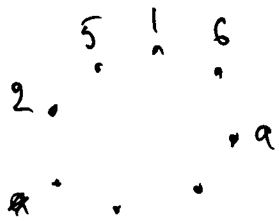
тогда a=2 или 3 или 5, но

все эти ~~3~~ три числа заняты ⇒ противоречие



# Бланк ответов

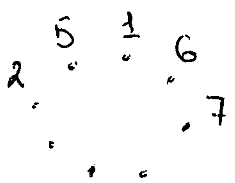
2. $\{p; p+1\} = \{5; 6\}$




~~Тогда $a-5=2$ или $1 \Rightarrow a=7$ или $6$ или $5-a=2$ или $1 \Rightarrow a=3$ или $4$~~

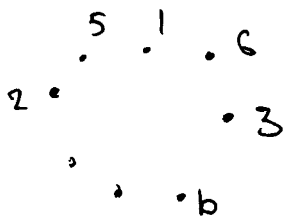
Тогда $a-1=1$ или $2$ или $3$ или $6 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=2$ или $3$ или $4$ или $7$, но
$a\neq 2$ и $a\neq 4$ (мы пытаемся найти пример где 4 и 6 не рядом)

А если $a=7$ ?



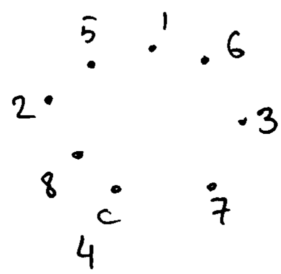

Потерян лист

Если $a=3$




$b-6=3$ или $1 \Rightarrow b=9$ или $7$
или
$6-b=3$ или $1 \Rightarrow b=3$ или $5$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow b=7$

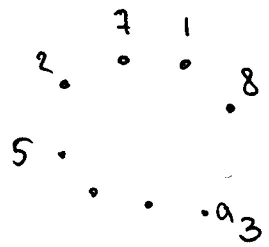



Тогда $c-3=7$ или $1 \Rightarrow c=10$ или $c=4$
$3-c=7$ или $1 \Rightarrow c=-4$ или $c=2$

Тогда $c=4$

Но тогда $2 \nmid (8-5) \Rightarrow$ ?

3. $\{p; p+1\} = \{7; 8\}$

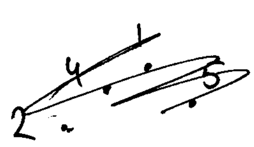



Тогда $a-1=1$ или $2$ или $4$ или $8 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=2$ или $3$ или $5$ или $9 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~$a=3$~~ $a=3$

Тогда остались только 2 соседних места и 4 и 6 $\Rightarrow$ 4 и 6 стоят рядом

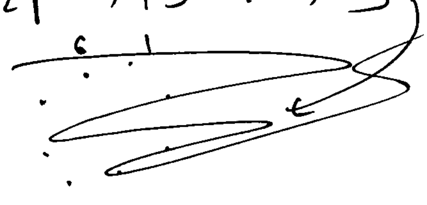
Рассмотрим 2 случай:
пара $\{p-1; p\}$ может быть $\{4; 5\}$ или $\{6; 7\}$

~~1. $\{p-1; p\} = \{4; 5\}$~~

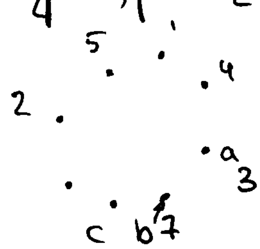


~~Но тогда 5 и 2 не рядом $\Rightarrow$ ?~~

~~2. $\{p-1; p\} = \{6; 7\}$~~



1. $\{p-1; p\} = \{4; 5\}$

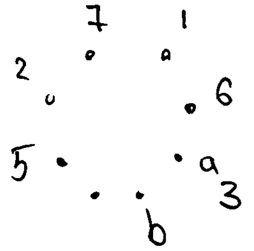



$a-1=1$ или $2$ или $4 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=2$ или $3$ или $5 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=3$
$b-4=1$ или $3 \Rightarrow b=5$ или $7$
или
$4-b=1$ или $3 \Rightarrow b=3$ или $1$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow b=7$

$\left.\begin{array}{l} c-3 = 1 \text{ или } 7 \\ 3-c = 1 \text{ или } 7 \end{array}\right\} \Rightarrow c = -4$ или 2 или 4 или 10, но все эти числа либо заняты, либо не от 1 до 8 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ↯ +

2. $\{p-1; p\} = \{6; 7\}$




$a-1 = 1$ или 2 или 3 или 6 $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2$ или 3 или 4 или 7 $\Rightarrow$

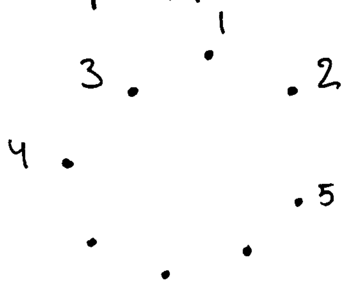
$\Rightarrow a = 3$ (мы не хотим, чтобы 4 и 6 были рядом)

$\left.\begin{array}{l} b-6 = 1 \text{ или } 3 \\ 6-b = 1 \text{ или } 3 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 7$ или 9 или 5 или 3, но все эти числа уже заняты или не от 1 до 8 $\Rightarrow$ ↯ +

Рассмотрим 3 случай:

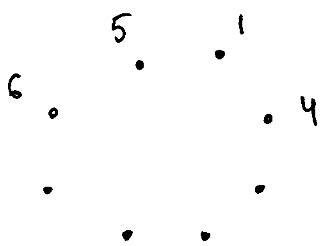
Тогда $\{p-1; p\} = \{2; 3\}$ или $\{\cancel{5}, 4; 5\}$ или $\{6; 7\}$

1. $\{p-1; p\} = \{2; 3\}$



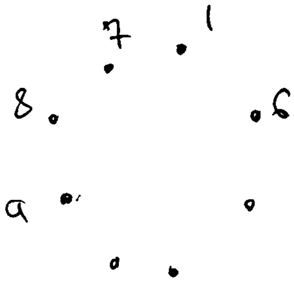

Но тогда $2 \nmid (5-1) \Rightarrow$ ↯ +

2. $\{p-1; p\} = \{4; 5\}$




Но 5 и 2 рядом $\Rightarrow$ ↯ +

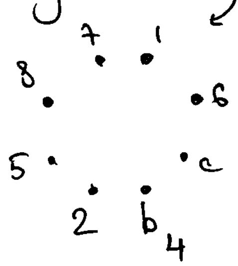
3. $\{p-1; p\} = \{6; 7\}$




$\left.\begin{array}{l} a-7 = 1 \text{ или } 2 \text{ или } 4 \text{ или } 8 \\ 7-a = 1 \text{ или } 2 \text{ или } 4 \text{ или } 8 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 8$ или 9 или 11 или 15 или 6 или 5 или 3 или $-1$

$\Rightarrow a = 5$ или 3

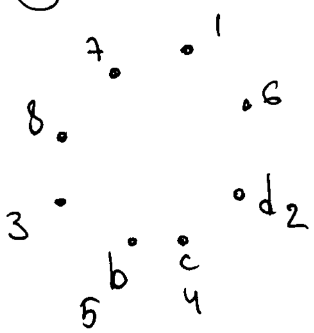
Пусть $a = 5$, Т.к. 6 и 4 не рядом $\Rightarrow b = 4$, $c = 3$, но




$3 \nmid (6-4) \Rightarrow$ ↯

Дополнительный бланк №1

Пусть $a=3$



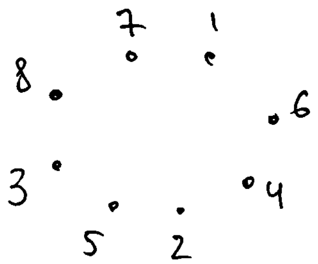

Тогда $8-b=1$ или $3 \Rightarrow b=7$ или $5 \Rightarrow b=5$

Т.к. 6 и 4 не рядом $\Rightarrow c=4$ и $d=2$

Но $4 \nmid (5-2) \to$ +

Мы перебрали все варианты и не смогли построить так, чтобы 6 и 4 были не соседями, а 5 и 2 - соседи.

~~Ответ~~: $\Rightarrow$ 6 и 4 стоят рядом, вот пример:




+.

№2.

$$a \cdot \sqrt{(1-b^2)\cdot(1-c^2)} = a \cdot \sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2} =$$

Из данного равенства $1-b^2-c^2=a^2+2abc$

$$= a \cdot \sqrt{a^2+2abc+b^2c^2} = a \cdot \sqrt{(a+bc)^2}, \text{ т.к. } a,b,c>0 \Rightarrow \sqrt{(a+bc)^2} =$$

$$= a+bc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot \sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a \cdot (a+bc)$$

~~Аналогично~~ Тогда с остальными слагаемыми делаем аналогичную операцию и получаем:

$$\underbrace{a \cdot \sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}} =$$

$$= a\cdot(a+bc) + b\cdot(b+ac) + c\cdot(c+ab) =$$

$$= a^2+b^2+c^2+3abc = (a^2+b^2+c^2+2abc)+abc = \underbrace{1+abc}$$

$1+abc \geq 2\sqrt[2]{abc}$, ч.т.д.

из нер-ва о ср. арифметическом и ср. геометрическом

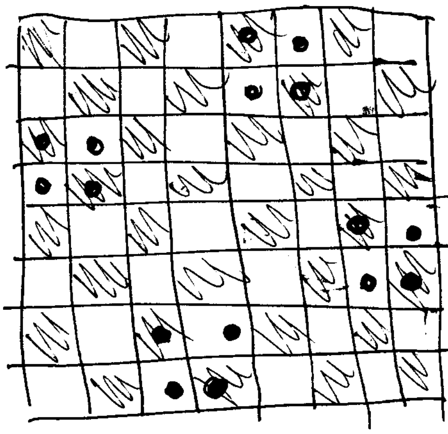
+

№4.

~~Расскрасим ~~на~~ доску в шахматную расскраску, тогда пусть черный оборотень — тот, что стоит на черной клетке; белый оборотень на белой~~

~~Заметим, что черный оборотень бьет только черные клетки, а белый только белые => т.к. каждый оборотень бьет то 5 клеток, то черных оборотней как минимум 7 ( $\frac{32 \text{ ч.кл.}}{5}$ и еще 2) и белых как минимум 7 -> всего как минимум 14 оборотней.~~

Пример на 16 оборотней:



Оценка на 16:

Расскрасим доску в шахматную расскраску, тогда черный оборотень - ~~тот~~ тот, что стоит на черной клетке, белый на белой.

Заметим, что черный оборотень бьет только черные клетки, а белый только белые.

~~Оценка на 16:~~

Рассмотрим отмеченные точкой черные клетки, заметим, что нет такого места для оборотня, чтобы он бил 2 или больше из отмеченных точек => на отм. клетки надо 4 оборотня +

Также любой из оборотней который будет ~~бит~~ бить отмеченную точку никогда не будет бить 5 клеток, максимум 4 (галочки - возможные места для этих оборотней) => 4 ~~чер~~ из черных оборотней будут бить максимум 16 черных клеток => осталось ~~и~~ еще 16! Даже если оставшиеся черные оборотни бьют по 5 клеток, то их надо как минимум $\left[\frac{16}{5}\right]+1 = 4$ штук => черных оборотней минимум $4+4=8$ штук. С белыми аналогично => оборотней минимум $8+8=16$ штук. +

Ответ: 16