ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302483126529

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		
Класс	☐ 8 ☐ 9	☐ 10	☒ 11

Фамилия С Е Д Е Л Ь Н И К О В А

Имя О Л Ь Г А

Отчество Ю Р Ь Е В Н А

Дата рождения 0 9 0 9 2 0 0 6

Город участия П Е Р М Ь

Аудитория 1 1 5

Телефон 8 9 8 2 4 3 6 4 0 7 6

Дата 0 5 0 2 2 0 2 4 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302483126529

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 13:19 до 13:21

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	0	5	–					
Балл члена жюри №2	20	0	0	5	–					

Итоговый балл 25

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Вар. 1

Бланк ответов

Задача 3. Числа от 1 до 8; 2 и 5 рядом; Д-ть: 4 и 6 стоят рядом

5 2 x
y

$(x-5) \bmod 2 = 0$

$(y-2) \bmod 5 = 0$

$\Rightarrow x \in \{1;3;7\}; y \in \{1;3;4;7\}$

Числа могли быть расставлены так:

частный случай

4 8
6 3
5
1 7 2

рис. 1

т.к. 7 простое число и разность его соседних чисел не может быть равна 7, ~~что~~ то ~~он~~ вокруг 7 должно стоять последовательные числа; аналогично для числа 5, т.к. по усл-ю рядом с ним стоит 2, с другой стороны может быть только 1 или 3; Для 1 разность соседей тоже только 1

С данным условием числа можно расставить только как на рисунке 1. => числа 4 и 6 должны стоять рядом

Бланк ответов

Задание 1.

Найдём сумму всех чисел от 1 до 36: $S_{36} = \frac{1+36}{2} \cdot 36 = 37 \cdot 18 = 666$

Сумма всех чисел, стоящих по 6 горизонталям и 6 вертикалям в 2 раза больше, чем S_{36}, т.к. каждое число от 1 до 36 входит в неё дважды. $S = 2S_{36} = 666 \cdot 2 = 1332$.

6 сумм по горизонтали и 6 сумм по вертикали должно быть 12 последовательными числами, а значит представлять собой арифметическую прогрессию с разностью $d = 1$. Пусть первый член этой прогрессии a_1. Сумма всех 12 членов прогрессии S.

$$S = \frac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 \ ; \ d = 1 \Rightarrow S = \frac{2a_1 + 11}{2} \cdot 12 = 1332$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 11 = 222$$

$$2a_1 = 211$$

$$a_1 = 105{,}5$$

Такой должна быть наименьшая сумма по одной из вертикалей или горизонталей, для того чтобы числа можно было расставить так, как сказано в условии. Но a_1 это сумма 6 целых чисел $\Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$; a_1 должно быть целым числом

$105{,}5 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ ↯

Тогда мы пришли к противоречию, а значит в квадрате 6×6 нельзя расставить числа от 1 до 36 так, чтобы 6 сумм по вертикали и 6 сумм по горизонтали в некотором порядке были 12 последовательными числами.

Ответ: нет, нельзя.

+

$\boxed{\text{Задание 2.}}$ $a>0;\ b>0;\ c>0$

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$

д-ть: $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\geq 2\sqrt{abc}$

$2abc=1-a^2-b^2-c^2$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{abc}=\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}$ $\qquad |a|<1$

$\Rightarrow 2\sqrt{abc}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}$ $\qquad |b|<1$

$|c|<1$

$1-b^2=a^2+c^2+2abc$

$1-c^2=a^2+b^2+2abc$

$1-a^2=b^2+c^2+2abc$

(*)

$a\sqrt{(a^2+c^2+2abc)(a^2+b^2+2abc)}+b\sqrt{(a^2+b^2+2abc)(b^2+c^2+2abc)}+c\sqrt{(b^2+c^2+2abc)(a^2+c^2+2abc)}\geq\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}$

Поскольку обе части неравенства положительно, возведем их в квадрат:

$a^2(a^2+c^2+2abc)(a^2+b^2+2abc)+b^2(a^2+b^2+2abc)(b^2+c^2+2abc)+c^2(b^2+c^2+2abc)(a^2+c^2+2abc)\geq 2(1-a^2-b^2-c^2)$ $-2ac\sqrt{(a^2+c^2+2abc)^2(b^2+c^2+2abc)}\cdot$

$-2ab\sqrt{(a^2+b^2+2abc)^2(a^2+c^2+2abc)(a^2+b^2+2abc)}-2bc\sqrt{(b^2+c^2+2abc)^2(a^2+b^2+2abc)(a^2+c^2+2abc)}$

$\cdot\sqrt{a^2+b^2+2abc}$

(*):

$a\sqrt{(a^2+c^2+2abc)(a^2+b^2+2abc)}+b\sqrt{(a^2+b^2+2abc)(b^2+c^2+2abc)}+c\sqrt{(b^2+c^2+2abc)(a^2+c^2+2abc)}\geq\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-a^2-b^2c^2}$

$k=\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}$; т.к. $|a|\leq 1$; $|b|<1$, $|c|<1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a\underbrace{\sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2}}_{\vee\ k}+b\underbrace{\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2}}_{\vee\ k}+c\underbrace{\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2}}_{\vee\ k}\geq\sqrt{2}k$

$\sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2}>k$; $\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2}>k$; $\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2}>k$

$\Rightarrow$ д-ть: $a+b+c\geq\sqrt{2}$

$\sqrt{(1-2abc-b^2-c^2)(a^2+c^2+2abc)(a^2+b^2+2abc)}+\sqrt{(1-a^2-c^2-2abc)(a^2+b^2+2abc)(b^2+c^2+2abc)}+\sqrt{(1-a^2-b^2-2abc)\cdot}$

$\cdot\sqrt{(b^2+c^2+2abc)(a^2+c^2+2abc)}\geq\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}$

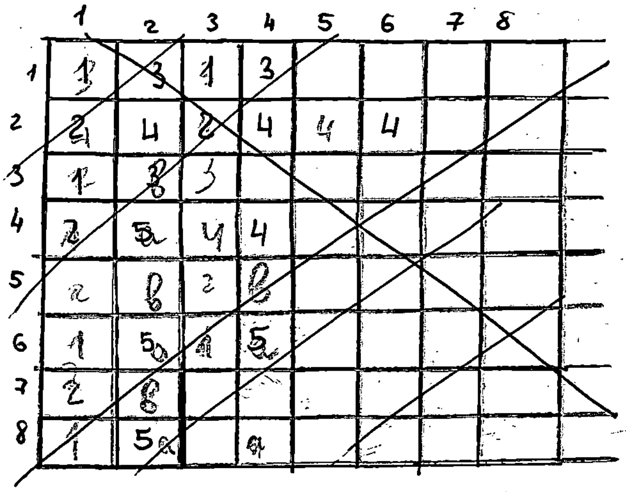
продвижений нет

Бланк ответов

Задание 4.

Изображу пример заполнение доски 8×8 оборотнями:

Буквами обозначим оборотней и клетки, которые они ударяют



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	a	e	a_1	c_1	a_1	c_1	a_1	c_1
2	b	f	b_1	d_1	b_1	d_1	b_1	d_1
3	a	e	a	e	a_1	c_1	e_1	g_1
4	b	f	b	f	b_1	d_1	f_1	h_1
5	a	e	d	g	e_1	g_1	e_1	g_1
6	b	f	c	h	f_1	h_1	f_1	h_1
7	d	g	d	g	d	g	e_1	g_1
8	c	h	c	h	c	h	f_1	h_1

если расставить оборотней так, как показано на рисунке, то они будут бить все клетки доски и при этом их будет наименьшее количество 16.

пример

Клетки, в которых должны стоять оборотни заштрихованы.

Сначала расставим оборотней ~~на~~ вдоль ребер доски, так чтобы они били угловые клетки и как можно больше клеток в целом, продолжим так заполнять столбцы и к восьмому мы поймём, что 16 оборотней бьют все клетки и это оптимальный вариант. Меньше оборотней поставить нельзя

не доказано

Ответ: 16 оборотней.