ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302572125638

Титульный лист

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия СМИРНОВ

Имя КОНСТАНТИН

Отчество АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 25 05 2006

Город участия ПЕРМЬ

Аудитория 115

Телефон 89517406510

Дата 05 02 2024 **Подпись** Смирнов

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302572125638

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 1 Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	0	5	–					
Балл члена жюри №2	20	0	0	5	–					

Итоговый балл 25

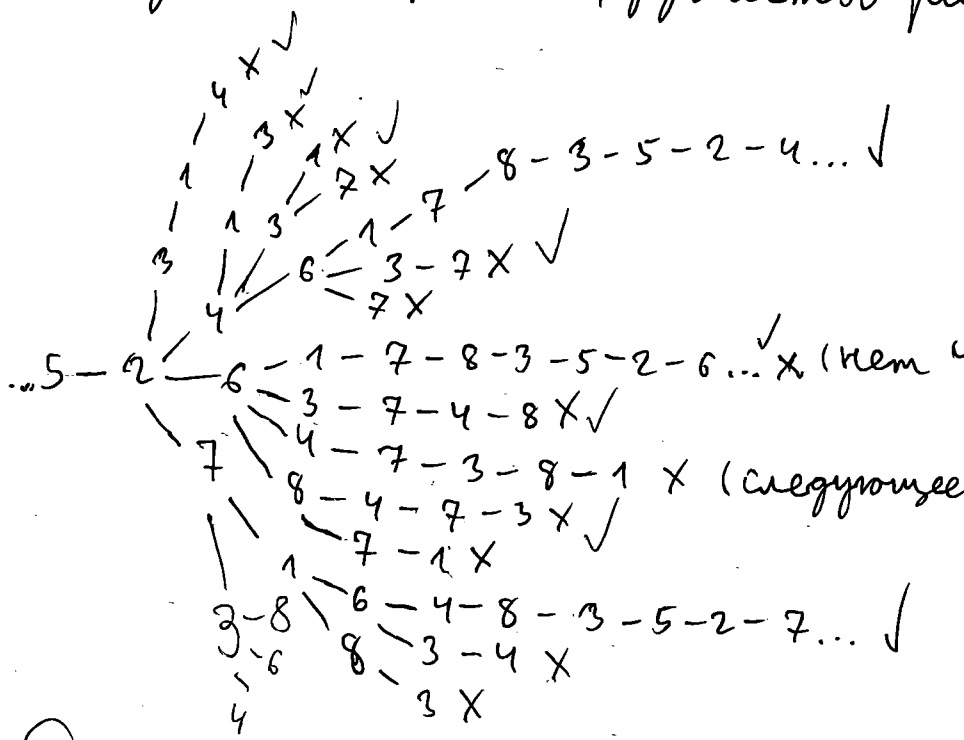
Подпись члена жюри №1 **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание №3

Построим древо чисел, которые идут после числа 2 (до числа 2 – число 5), чтобы найти все последовательности из 8 чисел, удовлетворяющие условию:

отметим X оборвавшиеся ветки (последовательность не будет удовлетворять условию вне зависимости от чисел, которые будут стоять далее. отметим √ветки с последовательностью, удовлетворяющей условию:



перебор неполный

Получается, всего две различных последовательности, удовлетворяющих условию. В каждой из них числа 4 и 6 стоят рядом:

– 5 – 2 – 4 – 6 – 1 – 7 – 8 – 3 –

– 5 – 2 – 7 – 1 – 6 – 4 – 8 – 3 –

Значит, числа 4 и 6 всегда стоят рядом.

Задание № 4 (лист 1)

Допустим, что оборотень, который бьёт 4 различных клетки, которые не бьют другие оборотни, поставлен правильно (правильный). Попробуем расставить всех оборотней правильно. Кругом обведём место, где стоит оборотень, а числами отметим клетки, которые бьёт этот оборотень с номером от 1 до n.

1	2	16	2	16	2	16	14
3	5	3	15	3	15	13	15
1	6	1	2	16	14	12	14
4	5	3	5	13	15	13	11
1	6	7	8	12	10	12	14
4	5	4	8	9	11	13	11
2	6	7	10	7	10	12	10
4	8	9	8	9	8	9	11

пример

Таким образом, $n = 16 = \frac{64}{4}$ оборотней можно поставить правильно.

Можно ли поставить меньше 16 оборотней? Тогда в среднем каждый оборотень будет бить $\frac{64}{15} = \frac{12,8}{3} = 4\frac{4}{15}$ клеток.

То есть, 11 об. бьют 4 клетки, а 4 об. бьют 5 кл.

Подумаем, куда можно их поставить:

2	4					4	2
4							4
		1	3	3	1		
		3			3		
		3			3		
		1	3	3	1		
4							4
2	4					4	2

В клетки с номером 1 точно ставить нельзя, потому что тогда придётся ставить ещё оборотнев который будет бить угловую клетку с номером 2. Этот оборотень побьёт меньше 4 клеток (1 или 2), т.к. остальные побьёт об. в клетке с номером 1.

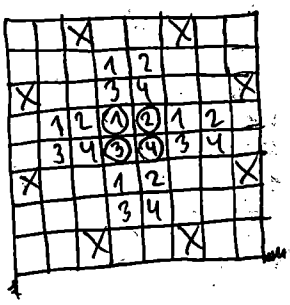
А кто запрещает это делать?

Если поставить оборотня, бьющего 5 клеток в клетку с номером 3, то будет ситуация описанная выше, только с какой-то из клеток с номером 4.

Остаётся ставить только в центральные 4 клетки, так как отступ от полей должен быть минимум 2 клетки, чтобы оборотень бил 5 клеток.

Посмотрим, принесёт ли это успех.

Задание 4 (лист 2)



Расставили оборотней, бьющих 5 клеток. Клетки, в которые можно поставить правильных оборотней (бьющих 4 клетки), отмечены X. Их меньше 11 — это значит, что нельзя расположить 11 правильных оборотней. Значит, 15 оборотней не может находиться на доске. Если 14 оборотней, то каждый из них в среднем будет бить $\frac{64}{14} = \frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$ клеток. То есть, оборотней бьющих 5 клеток будет даже больше, чем правильных ($\frac{4}{7} > \frac{3,5}{7}$). Но на доске таких оборотней не больше 4, а значит 14 оборотней находиться не может. Если продолжать уменьшать количество оборотней, то количество оборотней, бьющих 5 клеток будет только увеличиваться, но их может находиться не больше 4 на доске: $\frac{64}{13} = 4\frac{12}{13}$; $\frac{64}{12} = 5\frac{1}{3}$ — это невозможно, т.к. один оборотень бьёт не больше 5 клеток; и т.д. Эти оборотни бить одинаковое количество клеток невозможно будет

Значит, минимальное количество оборотней на доске — 16.

Ответ: 16 оборотней.

+

Задание №2

а если нет?

Допустим, что $a=b=c=0,5$, тогда равенство

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$ верно:

$0,25+0,25+0,25+0,25=1$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\geq 2\sqrt{abc}$

$0,5\sqrt{0,75\cdot 0,75}+0,5\sqrt{0,75\cdot 0,75}+0,5\cdot\sqrt{0,75\cdot 0,75}\geq 2\cdot\sqrt{0,125}$

$0,375+0,375+0,375\geq\sqrt{0,5}$

$1,125\geq\sqrt{0,5}$

$1,125>\sqrt{1}\geq\sqrt{0,5}$

$1\geq 0,5$

Значит, неравенство верно.

Задание № 1 (лист 1)

Произвольно расставим 36 чисел и посчитаем суммы:

1	2	3	4	5	6	21
7	8	9	10	11	12	57
13	14	15	16	17	18	93
19	20	21	22	23	24	129
25	26	27	28	29	30	165
31	32	33	34	35	36	201
96	102	108	114	120	126	

Так как сумма чисел от 1 до 36 равна 666, то и суммы сумм в строчках и столбцах будут равны 666:

$21+57+93+129+165+201=666$

$96+102+108+114+120+126=666$

Значит, если какое-то одно число переставить, то одна сумма в столбце и строчке изменится на столько же, на сколько изменится другая сумма в столбце и строчке. Но одна из этих двух сумм увеличится на это число (разность чисел), а другая уменьшится. То есть сумма 6 чисел всегда будет 666. Например суммы по горизонтам получились: 108 | 109 | 110 | 112 | 113 | 114. остаётся число 111, которое сложно получить, т.к. $\frac{666}{6}=111$ — это среднее значение 6 чисел. Если увеличить 110 на 1, то придётся уменьшить 108 на 1, т.к. уменьшение других чисел приведёт к повтору числа. 6 чисел: 107 | 109 | 111 | 112 | 113 | 114.

Или можно уменьшить 112 на 1, тогда придётся увеличить 114 на 1 по причине, описанной выше: 108 | 109 | 110 | 111 | 113 | 115.

Задание №1 (лист 2)

Тогда оставшиеся 6 чисел должны заполнить 2 пропуска в последовательности: (в 1 и 2 случаях)

1) 108 | 110 и 4 числа

2) 112 | 114 и 4 числа

1) числа 105 | 106 | 115 | 116 не подходят, т.к. сумма будет 660, что меньше 666.

числа 106 | 115 | 116 | 117 не подходят, т.к. сумма будет 672, что больше 666.

Других вариантов нет

2) числа 106 | 107 | 116 | 117 не подходят, т.к. сумма будет 672, что больше 666

числа 105 | 106 | 107 | 116 не подх. т.к. сумма = 660 < 666

Значит, нельзя расставить 12 чисел в виде ряда последовательных чисел.

И правда, ведь в каждой шестёрке числа можно расположить симметрично относительно 111, но если одно из чисел 111, то симметрия нарушается, ведь оставшиеся 5 чисел нельзя расставить симметрично. А если одна шестёрка расставлена симметрично, а другая — нет, то не может получится симметрии относительно 111 (111 — центр симметрии), что нам необходимо получить для расстановки 12 чисел последовательно.

дание № 1 (лист 3)

Ведь если числа нужно расставить последовательно, то 111 должно быть среди них, т.к. в каждой шестёрке 111 - среднее значение, а значит все числа не могут быть больше или меньше него. А если число 111 в группе чисел, то в одной шестёрке чисел можно достичь симметрии относительно 111, а в другой - нет, а значит во всей группе 12 чисел симметрии не будет, хотя она необходима для того, чтобы расставить числа последовательно.

Ответ: нет, нельзя

~~Задание~~

Задание 5