ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101034431461

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия ГРЕХОВ

Имя АЛЕКСАНДР

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 12 04 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория С III

Телефон +79826675515

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101034431461

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	5	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	5	0					

Итоговый балл 65

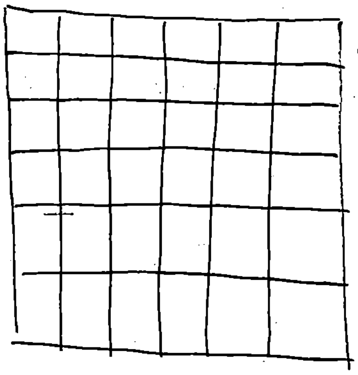
Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание №1



a_1 Давайте предположим, что минимальная сумма — a_1, тогда сумма всех рядов и столбцов равна:

$S = 12a_1 + 66 \quad (a_1 + (a_1+1) + \ldots + (a_1+11))$

Одновременно с этим S — это удвоенная сумма чисел от 1 до 36. Мы посчитали каждое число 2 раза — в столбце и в строке. А сумма чисел от одного до 36 равна: $\frac{36 \cdot 37}{2} = 18 \cdot 37 = 666$ (формула суммы арифметической прогрессии. Значит:

$S = 12a_1 + 66 = 666 \cdot 2$

$12a_1 = 1332 - 66$

$12a_1 = 1266$

$a_1 = \frac{1266}{12} = 105{,}5$ — дробное число, противоречие, т.к. все суммы должны быть натуральными числами.

Значит ответ — нельзя.

Ответ: нельзя

Задание №2

Рассуждая „от противного“ предположим, что для любого i от 1 до 2022 выполнено:

$a_i^2 < 2_{i+1} - 1$

Рассмотрим подробнее это неравенство, для удобства заменим a_i и a_{i+1} на x и y:

$x^2 < 2y - 1$

$x^2 + 1 < 2y$

$\frac{x^2+1}{2} < y$

Все переходы легальны. Продолжение на следующей странице.

Задание № 2 (продолжение)

$$\frac{x^2+1}{2} < y$$

Давайте сравним $\frac{x^2+1}{2}$ и x:

$$\frac{x^2+1}{2} \vee x \quad \Big| \cdot 2$$

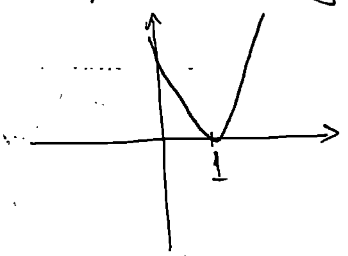
$$x^2+1 \vee 2x$$

$$x^2-2x+1 \vee 0$$

$$D = 4-4=0$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

График выглядит так:



Значит $\frac{x^2+1}{2} \geq x$, ~~при условии, что $x \neq 1$. Случай где $x=1$, мы рассмотрим.~~

Получаем:

$$x \leq \frac{x^2+1}{2} < y$$

$$\Downarrow$$

$$x < y$$

Значит, из наших рассуждений „от противного" мы получим:

$$a_1^2 < 2a_2-1$$

$$a_2^2 < 2a_3-1$$

$$\dots$$

$$a_{2022}^2 < 2a_{2023}-1$$

Учитывая следствие, доказанное выше, получаем:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2022} < a_{2023}$$

Но вспоминаем про условие:

$$a_{2023}^2 \leq 2a_1-1$$

Но $a_1 < a_{2023} \Rightarrow a_{2023}^2 > 2a_1-1$ — противоречие с условием

Бланк ответов

Задание №2 (продолжение 2)

Если $a_1 < a_{2023}$, то $a_{2023}^2 > 2a_1 - 1$. Докажем это:

Пусть $a_{2023} = a_1 + \underset{0}{\underset{\vee}{b}}$. Тогда ($b>0$):

$(a_1+b)^2 \vee 2a_1 - 1$

$a_1^2 + 2a_1b + b^2 \vee 2a_1 - 1$

$a_1^2 + 2a_1(b-1) + (b^2+1) \vee 0$

$D = 4(b-1)^2 - 4(b^2+1) = 4(b^2-2b+1) - 4b^2 - 4 = 4b^2 - 8b + 4 - 4b^2 - 4 = -8b < 0$

т.к. $b>0$

Значит график лежит над осью OX $\Rightarrow (a_1+b)^2 > 2a_1 - 1 \Rightarrow a_{2023}^2 > 2a_1 - 1$

А мы предположили, что доказываемое в задаче неверно и получили,

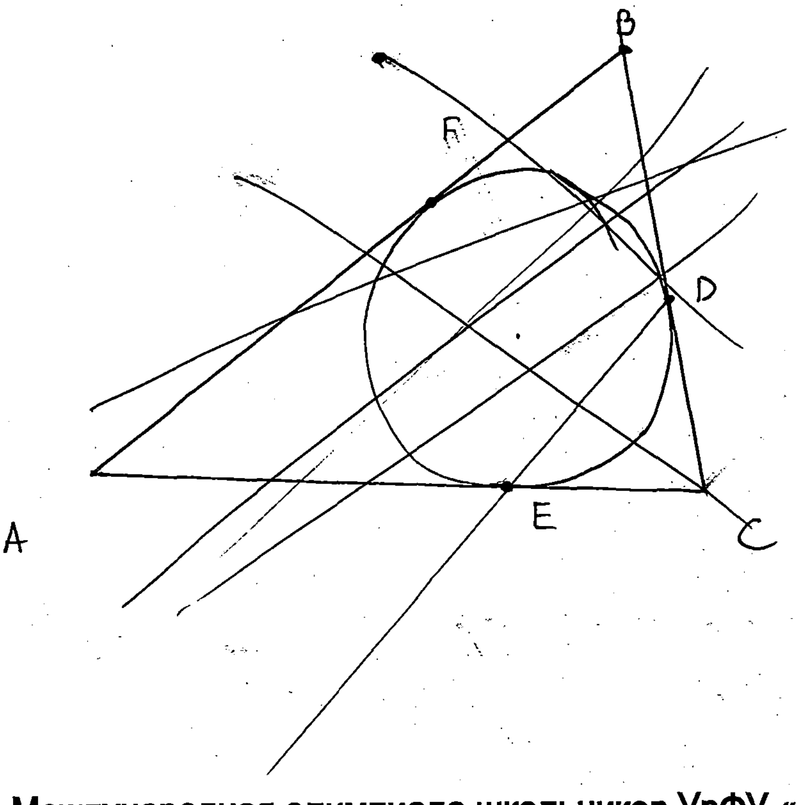
$a_1 < a_2 < \ldots < a_{2023}$

что является противоречием первому условию задачи (доказано выше)

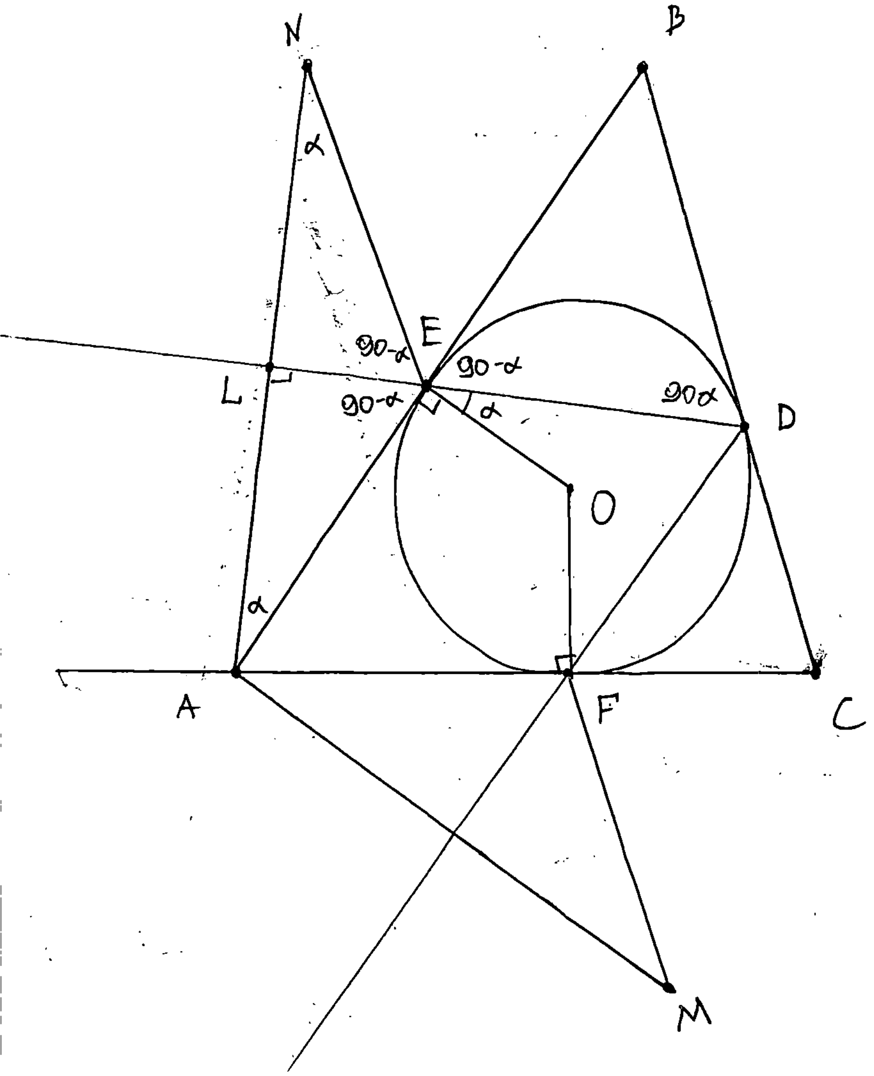
$\Downarrow$

Мы можем найти такое i

Не проверяйте это



Задание №3



O – центр окружности

Сделаем качественный чертёж, приступим к решению:

Обозначим $\angle NAE$ за α. Тогда $\angle AEL = 90-\alpha$ (L – точка пересечения DE и AN), т.к. $\angle ALE = 90°$, т.к. DE – ось симметрии.

$\angle OEA = 90°$ (т.к. OE – радиус впис. окр)

$\angle LEA + \angle AEO + \angle OED = 180°$

⇓

$\angle OED = 180° - \angle LEA - \angle AEO = 180 - 90 - (90-\alpha) = \alpha$

⇓

$\angle BED = 90-\alpha$ (т.к. $\angle BEO = \angle BED + \angle DEO = 90°$, т.к. $\angle OEA = 90°$)

$\triangle EBD$ – р/б, т.к. отрезки касательных BE и BD равны $\Rightarrow \angle BED = \angle BDE = 90-\alpha$

$\angle NEL = 90-\alpha$ (в силу симметрии, относительно DE)

⇓

$\angle NEL = \angle BDE = 90-\alpha \Rightarrow NE \parallel BD \Rightarrow NE \parallel BC$ (т.к. BC содержит BD) т.к. равны соответственные углы

Бланк ответов

Задание №3 (продолжение)

Аналогично $FM \parallel BC$. Теперь осталось доказать, что $NE = FM$.

$NE = AE$ (в силу симметрии)

$FM = AF$ (в силу симметрии)

$AE = AF$ (т.к. отрезки касательных)

$\Downarrow$

$NE = FM$

$\Downarrow$

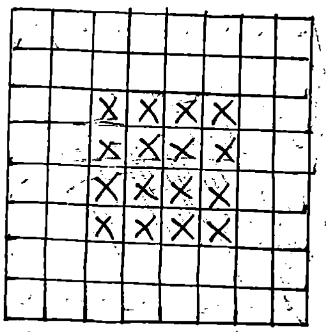
$MENF$ – пар-мм, т.к. противоположные стороны равны и параллельны

+

Задание №4 5

Оценка: каждый вампир бьёт 4 клетки, всего 64 клетки, значит нужно хотя бы 16 вампиров.

Пример на 16 вампиров:



Можете сами убедиться, что они бьют всю доску.

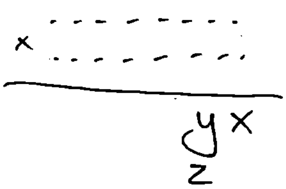
~пример

7

Задание №5

Задача составлена некорректно. Сейчас я докажу, что произведение любых двух приятных чисел модуль которых > 3, не может быть приятным числом. $735 \cdot 133 = 97755$

Предположим, что мы перемножаем такие числа:



Первым делом, мы перемножим последние цифры каждого числа и получим некое нечётное число, оканчивающееся на нечётную цифру X. При переходе через разряд, будет переноситься только чётная цифра, т.к. ($5\cdot5=\underline{2}5$, $7\cdot7=\underline{4}9$, $9\cdot9=\underline{8}1$)

продолжение на следующей странице

Задание №5 (продолжение)

```
  . . . . . . . .
× . . . . . . .
-----------------
    . . . . y x
. . . . . . z
-----------------
            a x
```

Итак, доказали, что x - нечётная цифра и если случился переход через разряд, то мы перенесли чётное число.

Перемножаем далее, опять нечётное × нечётное = нечётное если же был переход, то нечётное + чётное = нечётное => y — нечётная цифра.

По тем же соображениям, когда начнём перемножать вторую цифру второго числа, то возникнет нечётная цифра z (нечёт · нечёт = нечёт)

Теперь перейдём в конец, к сложению. Последняя цифра будет x, она нечётна, всё в порядке, а вот дальше идёт $y+z$, где y, z — нечётные цифры => их сумма будет оканчиваться чётной цифрой a, значит конечное произведение не приятное число.

Числа 1 и 3 не вписываются в эту систему, т.к. тем нету перехода через разряд.

В итоге имеем неверно составленную задачу.