ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302863280263

Титульный лист

Направление	[ ] информатика	[ ] история	[x] математика
	[ ] обществознание	[ ] русский язык	[ ] физика
	[ ] химия		

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия ОРЛОВ

Имя НИКОЛАЙ

Отчество АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 23 08 2006

Город участия ОРЕНБУРГ

Аудитория 412

Телефон +79534520180

Дата 05 02 2024 **Подпись** Нов

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302863280263

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ОРЕНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	0	3					
Балл члена жюри №2	20	20	0	0	3					

Итоговый балл 43

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1

Пусть суммы в столбцах и строках равны $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}, a_{12}$.

Пусть $a_{min} = x \Rightarrow a_{max} = x+11$, т.к. $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ должны быть последовательными числами.

Сумма сумм в строках равна $1+2+\ldots+36 = \frac{37\cdot 36}{2}$

Сумма сумм в столбцах равна $1+2+\ldots+36 = \frac{37\cdot 36}{2}$ $\Bigg\} \Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_{12} = 37\cdot 36$

Т.к. $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ – последовательные натуральные, то $a_1+a_2+\ldots+a_{12} = x+(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+10)+(x+11) = 12x + \frac{11\cdot 12}{2} = 12x+66$

$\cancel{12x+36=37}$ $12x+66 = 37\cdot 36 \quad |:6 \Rightarrow 2x+11 = 37\cdot 6 \Rightarrow 2x = 211 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow a_{min} \in \mathbb{Z}$,

но a_{min} – это сумма 6-ти натуральных чисел $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ нет, нельзя

Ответ: нет, нельзя

+

№2

$a^2+b^2+c^2+2abc = 1$

$(1-b^2)(1-c^2) = 1-b^2-c^2+b^2c^2 = 1-(b^2+c^2)+b^2c^2$

$\cancel{a^2+b^2}$ $b^2+c^2 = 1-a^2-2abc$ $\Bigg\} \Rightarrow 1-(b^2+c^2)+b^2c^2 = 1-(1-a^2-2abc)$ $\cancel{a+b^2c^2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (1-b^2)(1-c^2) = a^2+2abc+b^2c^2 = (a+bc)^2$

Аналогично получаем, что $(1-c^2)(1-a^2) = (b+ac)^2$, $(1-a^2)(1-b^2) = (c+ab)^2$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = a\sqrt{(a+bc)^2} + b\sqrt{(b+ac)^2} + c\sqrt{(c+ab)^2}$

$a, b, c > 0 \Rightarrow a\sqrt{(a+bc)^2} + b\sqrt{(b+ac)^2} + c\sqrt{(c+ab)^2} = a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab) = a^2+b^2+c^2+3abc$

$a^2+b^2+c^2+2abc = 1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+3abc = 1+abc \Rightarrow$ ~~тогда~~ требуется доказать $1+abc \geq 2\sqrt{abc}$

Возведём в квадрат: (равносильное преобразование, т.к. $a, b, c > 0$)

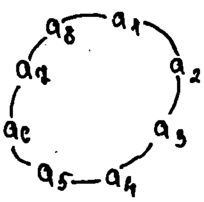
$a^2b^2c^2 - 2abc + 1 \geq 0$

$(abc-1)^2 \geq 0$ – это верно ч.т.д.

+

№3

Пусть числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_8$, $1 \leq a_i \leq 8$, $a_i \in \mathbb{N}$



Не умаляя общности, пусть $a_3 = 2$ и $a_4 = 5$, тогда

$a_3 \vdots a_4 - a_2 \Rightarrow 2 \vdots 5 - a_2 \Rightarrow a_2 = 3$ или $a_2 = 4$

или

$a_3 \vdots a_2 - a_4 \Rightarrow 2 \vdots a_2 - 5 \Rightarrow a_2 = 7$ или $a_2 = 6$

$a_4 \vdots a_5 - a_3 \Rightarrow 5 \vdots a_5 - 2 \Rightarrow a_5 = 7$ или $a_5 = 3$

или

$\cancel{a_5}$ $a_4 \vdots a_3 - a_5 \Rightarrow 5 \vdots 2 - a_5 \Rightarrow a_5 = 1$

Р/м 7 случаев:

1) $a_2=3$, тогда $a_2 \vdots a_3-a_1 \Rightarrow 3 \vdots 2-a_1 \Rightarrow a_1=1$
или
$a_2 \vdots a_1-a_3 \Rightarrow 3 \vdots a_1-2 \Rightarrow a_1=5$ ($a_1=3$ не подходит, т.к. $a_2=3$), ($a_1=5$ не подх., т.к. $a_4=5$)

Получаем $a_1=1$: $a_1 \vdots a_8-a_2 \Rightarrow 1 \vdots a_8-3 \Rightarrow a_8=4$
или
$a_1 \vdots a_2-a_8 \Rightarrow 1 \vdots 3-a_8 \Rightarrow a_8=2$, но 2 уже занято $\Rightarrow a_8=4$

$a_8=4$: $a_8 \vdots a_1-a_7 \Rightarrow 4 \vdots 1-a_7$, $1-a_7<0$ – не подх.
или
$a_8 \vdots a_7-a_1 \Rightarrow 4 \vdots a_7-1 \Rightarrow a_7=5$ или $a_7=3$ или $a_7=2$, но эти числа уже заняты $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow a_2 \neq 3$ ✓

2) $a_2=4$, тогда $a_2 \vdots a_3-a_1 \Rightarrow 4 \vdots 2-a_1 \Rightarrow a_1=1$
или
$a_2 \vdots a_1-a_3 \Rightarrow 4 \vdots a_1-2 \Rightarrow a_1=6$ или $a_1=3$

если $a_1=1$: $a_1 \vdots a_2-a_8 \Rightarrow 1 \vdots 4-a_8 \Rightarrow a_8=3$ ~~иначе~~
или
$a_1 \vdots a_8-a_2 \Rightarrow 1 \vdots a_8-4 \Rightarrow a_8=5$, но $a_4=5$ $\Rightarrow$ противоречие ✓

$a_8=3$: $a_8 \vdots a_1-a_7 \Rightarrow 3 \vdots 1-a_7$, $1-a_7<0$ – не подх.
или
$a_8 \vdots a_7-a_1 \Rightarrow 3 \vdots a_7-1 \Rightarrow a_7=4$ или $a_7=2$, но $a_3=2$ и $a_2=4$ $\Rightarrow$ противоречие ✓

если $a_1=3$: $a_1 \vdots a_2-a_8 \Rightarrow 3 \vdots 4-a_8 \Rightarrow a_8=1$ или $a_8=3$, но $a_1=3 \Rightarrow a_8=3$ не подх.
или
$a_1 \vdots a_8-a_2 \Rightarrow 3 \vdots a_8-4 \Rightarrow a_8=7$ или $a_8=5$, но $a_4=5 \Rightarrow a_8=5$ не подх.

1. $a_8=1$: $a_8 \vdots a_1-a_7 \Rightarrow 1 \vdots 3-a_7 \Rightarrow a_7=2$ – не подх., т.к. $a_3=2$ ✓
или
$a_8 \vdots a_7-a_1 \Rightarrow 1 \vdots a_7-3 \Rightarrow a_7=4$, но $a_2=4 \Rightarrow a_7=4$ не подх.

2. $a_8=7$: $a_8 \vdots a_1-a_7 \Rightarrow 7 \vdots 3-a_7 \Rightarrow a_7=2$ – не подх., т.к. $a_3=2$ ✓
или
$a_8 \vdots a_7-a_1 \Rightarrow 7 \vdots a_7-3 \Rightarrow a_7=4$ – не подх., т.к. $a_2=4$

Получаем, что в этом случае подходит только $a_1=6$ и $a_2=4 \Rightarrow 4$ и 6 стоят рядом

3) $a_2=7$, тогда $a_2 \vdots a_3-a_1 \Rightarrow 7 \vdots 2-a_1 \Rightarrow a_1=1$
или
$a_2 \vdots a_1-a_3 \Rightarrow 7 \vdots a_1-2 \Rightarrow a_1=3$

если $a_1=1$: $a_1 \vdots a_2-a_8 \Rightarrow 1 \vdots 7-a_8 \Rightarrow a_8=6$
или
$a_1 \vdots a_8-a_2 \Rightarrow 1 \vdots a_8-7 \Rightarrow a_8=8$

1. $a_8=6$: $a_8 \vdots a_1-a_7 \Rightarrow 6 \vdots 1-a_7$, $1-a_7<0$
или
$a_8 \vdots a_7-a_1 \Rightarrow 6 \vdots a_7-1 \Rightarrow a_7=3$ или $a_7=2$ или $a_7=7$ $\Rightarrow$ прот.

2. $a_8=8$: $a_8 \vdots a_1-a_7 \Rightarrow 8 \vdots 1-a_7$, $1-a_7<0$
$a_8 \vdots a_7-a_1 \Rightarrow 8 \vdots a_7-1 \Rightarrow a_7=5$ или $a_7=3$ или $a_7=2 \Rightarrow a_7=3$

$a_7 = 3$: $a_7 \vdots a_8 - a_6 \Rightarrow 3 \vdots 8 - a_6 \Rightarrow a_6 = 5$ или $a_6 = 7$ $\rightarrow$ прот.

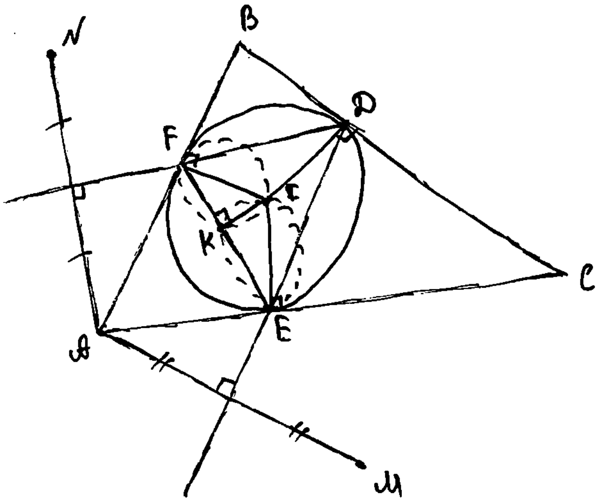
$a_7 \vdots a_6 - a_8 \Rightarrow 3 \vdots a_6 - 8$, $a_6 - 8 < 0$

Этот случай невозможен

не рассмотрены

Аналогично р/м остальные случаи и получаем, что Н и С стоят рядом и т.д.

№5



Проведём FK, KE, KI; $\angle FKI = \angle FKE = 90°$, т.к. углы опираются на диаметры FI и IE $\Rightarrow$ $\angle FKE = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$

неверно

$\Rightarrow$ $K \in FE$ $\Rightarrow$ надо доказать, что $F \in NM$ и $E \in NM$

№4.

1 ботр. покрывает max 5 кл. $\Rightarrow$ ботр-ней $\geq$ 13