ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101209409368

# Титульный лист

**Направление** ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

**Фамилия** ИЗМАЙЛОВ

**Имя** ДМИТРИЙ

**Отчество** СЕРГЕЕВИЧ

**Дата рождения** 19 11 2006

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

**Аудитория** 632

**Телефон** 89149168772

**Дата** 05 02 2024 **Подпись**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101209409368

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление** ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

## Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке 1

Время выхода с : до :

## Протокол проверки
## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 20 | 20 | 0 | 0 | — | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 20 | 20 | 0 | 0 | - | | | | | |

**Итоговый балл** 40

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

# Бланк ответов

1 вариант

Задание 3

f 2 5 a b c d e

$2 : |f-5| \Rightarrow f = \{3; 4; 6; 7\}$

$5 : |2-a| \Rightarrow a = \{3; 1; 7\}$

$\Rightarrow (a;f) = \{(3;4); (3;6); (3;7); (1;3); (1;4); (1;6); (1;7); (7;3); (7;4); (7;6);\}$

1). Рассмотрим случай, когда $a=7$

f 2 5 7 b c d e

$f = \{3; 4; 6\}$

$7 : |5-b| \Rightarrow b = \{4; 6\}$

• Пусть $b = 4$

f 2 5 7 4 c d e

$f = \{3; 6\}$

$4 : |7-c| \Rightarrow c = \{3; 6; 8\}$

• Если $c = 3 \Rightarrow f = 6$

6 2 5 7 4 3 d e

осталось для e и d числа 1 и 8

$\Downarrow$

$e : |d-6|$ т.е.

либо $1 : 2$, что неверно

либо $8 : 5$, что тоже неверно $\Rightarrow$ такая расстановка неверна

• Если $c = 6 \Rightarrow f = 3$

3 2 5 7 4 6 d e

Ситуация зеркальна с предыдущей $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ расстановка также неверна

• Если $c = 8$ :

f 2 5 7 4 8 d e

$8 : |4-d| \Rightarrow d = \{3; 6\}$ и

~~...~~ $f = \{3; 6\}$

т.е. $e : |d-f| = 3$

$e : 3$

Но $e = 1 \not\vdots 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ расстановка неверна

Итак $b \neq 4$. В таком случае $b = 6$

$b = 6$

f 2 5 7 6 c d e

$6 : |7-c| \Rightarrow c = \{8; 1\}$

• $c = 1 \Rightarrow$

f 2 5 7 6 1 d e

$c=4$ утеряно.

$1 : |6-d| \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \varnothing$

т.к. возможные цифры уже расставлены в кругу

• $c = 8 \Rightarrow$

f 2 5 7 6 8 d e

$8 : |6-d| \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \{4\}$

$\Downarrow$

f 2 5 7 6 8 4 e

$f = \{1; 3\}$

$e = \{1; 3\}$

! с условием, что

$2 : |f-5| \Rightarrow f = 3$

и $e = 1$

Проверяем:

3 2 5 7 6 8 4 1

$4 \not\vdots 8-1$ – противоречие – неверная расстановка

Получили следующее: $b \neq \{4;6\} \Rightarrow a \neq 7$

• Пусть $a = 1 \Rightarrow$

f 2 5 1
e d c b

$f = \{3;4;6;7\}$

$1 : |5-b| \Rightarrow b = \{4;6\}$

• Пусть $b = 4$

$\Downarrow$

f 2 5 1
e d c 4

$4 : |c-1| \Rightarrow c = \{3\}$

$\Downarrow$

f 2 5 1
e d 3 4

$3 : |4-d| \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \{1;3\}$ – $d = 7$ у…
– уже использованные ~~…~~ числа

$\Downarrow$

противоречие

• Пусть $b = 6$.

$\Downarrow$

f 2 5 1
e d c 6

$6 : |1-c| \Rightarrow c = \{7;3\}$

• Пусть $c = 7$ $c = 4$ у…

$\Downarrow$

f 2 5 1
e d 7 6

$7 : |6-d| \Rightarrow d = \varnothing$

• $c = 3 \Rightarrow$

f 2 5 1
e d 3 6

$3 : |6-d| \Rightarrow$
$\Rightarrow d = 7$

$\Downarrow$

f 2 5 1
e 7 3 6

$f = 4$ т.к. другие возможные числа уже расставлены.

$\Downarrow$

$e = 8$, но

$8 : 7-4$ – противоречие

$\Downarrow$

$b \neq \{6;4\} \Rightarrow a \neq 1$

$\Downarrow$

$\underline{a = 3}$

• $a = 3 \Rightarrow$

f 2 5 3
e d c b

$\Rightarrow f = \{4;6;7\}$

$3 : |5-b| \Rightarrow b = \{4;6;8\}$

• Пусть $b = 4 \Rightarrow$

f 2 5 3
e d c 4

$f = \{6;7\}$

$4 : |3-c| \Rightarrow$
$\Rightarrow c = \{1;7\}$

• Пусть $c = 1$

$\Downarrow$

f 2 5 3
e d 1 4

$1 : |4-d| \Rightarrow d = \{3;5\}$ –
– уже расставлены

$\Downarrow$

противоречие

$\Downarrow$

$c \neq 1$

• $c = 7 \Rightarrow f = 6$

6 2 5 3
d e 7 4

$e, d \in \{1;8\}$

если $e = 1 \Rightarrow 7 : 4-1$ –
– противоречие

если $e = 8 \Rightarrow 7 : 8-4$ –
– противоречие

$\Downarrow$

$b \neq 4 \Rightarrow b = \{6;8\}$

# Бланк ответов

Итак, мы пришли к выводу, что $a=3$ и $b=\{6;8\}$ =>

Пусть $b=6$

=> f 2 5 e 3 d c 6 $\quad f=\{4;7\}$

если $f=7$ => e 7 2 5 3 d c 6

$7 \vdots |2-e|$ => $e=\{1\}$

$\Downarrow$ $\quad c,d\in\{4;8\}$

1 7 2 5 3 d c 6

$1 \vdots |7-d|$ =>

=> $d=8$

$\Downarrow$

$c=4$

Проверяем:

1 7 2 5 3 8 4 6

$1 \vdots (8-7)$ - верно

$7 \vdots (2-1)$ - верно

$2 \vdots (7-5)$ - верно

$5 \vdots (3-2)$ - верно

$3 \vdots (6-5)$ - верно

$6 \vdots (4-3)$ - верно

$4 \vdots (8-6)$ - верно

$8 \vdots (4-1)$ - неверно

$\Downarrow$

$f\neq 7$ => $f=4$ =>

4 2 5 e 3 d c 6

$6 \vdots |c-3|$ => $c=\{1\}$

$\Downarrow$ $\quad e,d\in\{7;8\}$

4 2 5 e 3 d 1 6

$\Downarrow$

либо $4 \vdots (7-2)$

либо $4 \vdots (8-2)$

противоречие в обоих случаях

$\Downarrow$

$b=8$

$b=8$ =>

f 2 5 e 3 d c 8

$8 \vdots |c-3|$ =>

=> $c=\{1;4;7\}$

$2 \vdots |5-f|$ => $f=\{6;\cancel{7};\cancel{8}\}$

Пусть $c=1$ =>

f 2 5 e 3 d 1 8

$1 \vdots |8-d|$ => $d=7$

$\Downarrow$

$f=\{6;\cancel{8}\}$

$\Downarrow$

$e=4$

6 2 5 4 3 7 1 8

Проверяем

$6 \vdots (4-2)$ - верно

$2 \vdots (6-5)$ - верно

$5 \vdots (3-2)$ - верно

$3 \vdots (8-5)$ - верно

$8 \vdots (3-1)$ - верно

$1 \vdots (8-7)$ - верно

$7 \vdots (4-1)$ - неверно =>

=> неверная расстановка

$c\neq 1$

Пусть $c=4$ =>

f 2 5 e 3 d 4 8

$4 \vdots |8-d|$ => $d=\{6;7\}$

Если $d=6$ => $f=7$ => $e=1$

$\Downarrow$

7 2 5 3 1 6 4 8 - $\boxed{\text{верная расстановка и 6 стоит рядом с 4}}$

Если же $d=7$ => $7 \vdots 4-1$ - неверно.

Пусть $c = 7$, тогда $f = 6$ =>

=> 6 2 5 3 / e 8 / d 7 $\qquad e, d \in \{1; 4\}$

если $d = 1$ => $1 : 7-4$ – неверно

если $d = 4$ => $4 : 7-1$ – неверно => $c \neq 7$

Итого: перебрав все возможные расстановки, верной оказалась только одна, и числа 6 и 4 в ней стоят рядом.

Задание 2

при переборе утеряно несколько случаев

—

~~рассмотрим выражение вида~~ $a+\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}$.

Из условия находим, что
$$1-b^2 = a^2+c^2+2abc$$
$$1-c^2 = a^2+b^2+2abc$$
$$-c^2 = a^2+b^2+2abc-1$$

Следовательно: $(1-b^2)(1-c^2) = (a^2+c^2+2abc)(a^2+b^2+2abc) =$

$= a^4+a^2b^2+2a^3bc+a^2c^2+b^2c^2+2abc^3+2a^3bc+2ab^3c+4a^2b^2c^2 =$

$= a^4+a^2b^2+2abc(a^2+c^2+a^2+2abc)+a^2c^2+b^2c^2 =$

$= a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(2a^2+c^2+2abc) =$

$= a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+4a^3bc+2abc^3+4a^2b^2c^2 =$

$= (a^4+4a^3bc+4a^2b^2c^2)+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc^3 =$

$= (a^2+2abc)^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc^3 = (a^2+2abc)^2+(a^2b^2+2abc^3+c^4)-c^4+a^2c^2+b^2c^2 =$

$= (a^2+2abc)^2+(ab+c^2)^2+c^2(a^2+b^2-c^2) =$ [illegible]

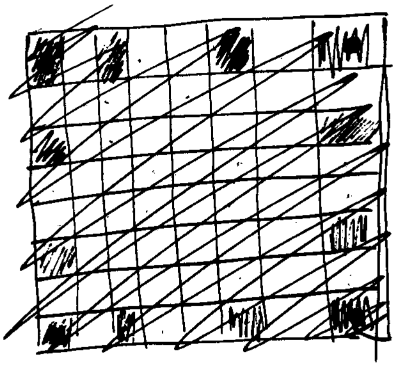
$=$ [illegible]

$= (a^2+2abc)^2+(ab+c^2)^2+c^2(a^2+b^2+a^2+b^2+2abc-1) =$

$= (a^2+2abc)^2+(ab+c^2)^2+2a^2c^2+2b^2c^2+2abc^3-c^2 =$

—

Задание 4



Т.к. на доске 64 клетки, а оборотень бьёт пять клеток, следовательно на доске должно стоять как минимум 13 оборотней, чтобы они били каждую клетку доски. Заметим, что это верно только для тех оборотней, которые бьют 4 клетки вокруг себя, но это не верно для любого оборотня.

Угловые клетки должны быть под боем => есть как минимум ~~три~~ четыре оборотня, которые бьют [illegible] менее 5 клеток.

Вариант расстановки 20 оборотней см. в Черновике

ответ 20 неверен, ни примера ни твёрдой оценки нет!

Задание 1

Если 12 сумм ~~образуют~~ являются последовательными числами, то обозначим наименьшую из них за $a_1$, тогда наибольшая будет равна $a_1+11$.

Сумма сумм $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{12} = \frac{a_1+a_{12}}{2}\cdot n = \frac{a_1+a_1+11}{2}\cdot 12 = 12a_1+66$

Сумма всех чисел на доске равна сумме всех сумм по горизонтали и вертикали деленной на 2 т.к. каждое число участвует в двух суммах: по вертикали и горизонтали =>

$$\Rightarrow \frac{1+36}{2}\cdot 36 = \frac{12a_1+66}{2}$$

$$37\cdot 18 = \frac{12a_1+66}{2} = 6a_1+33$$

+

Слева получаем чётное число, справа нечетное т.к одно из слагаемых ($6a_1$) точно чётное, а 33 – нечётное, а сумма чётного и нечётного – нечетное число.

Получаем противоречие – левая часть не равна правой т.к. $a_1 \in N$

Следовательно осуществить расстановку чисел от 1 до 36, соответствующую условием задачи, не получится.

Ответ: нельзя.

Задание 2

Рассмотрим выражение $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}$. Оно равно:

$a\sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2} = \sqrt{a^2-a^2b^2-a^2c^2+a^2b^2c^2}$. Из условия $a^2=1-2abc-b^2-c^2 \Rightarrow$ $b^2+c^2=1-2abc-a^2$

$\Rightarrow \sqrt{a^2-a^2b^2-a^2c^2+a^2b^2c^2} = \sqrt{\underbrace{1-2abc-b^2-c^2}_{a^2}+a^2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2} = \sqrt{(abc-1)^2-b^2-c^2-a^2b^2-a^2c^2} =$

$= \sqrt{(abc-1)^2-b^2(a^2+1)-c^2(a^2+1)} = \sqrt{(abc-1)^2-(a^2+1)(b^2+c^2)} =$

$= \sqrt{(abc-1)^2-(2-2abc-b^2-c^2)(b^2+c^2)} = \sqrt{(abc-1)^2-(a^2+1)(\underbrace{1-2abc-a^2}_{b^2+c^2})} =$

$= \sqrt{(abc-1)^2-(\cancel{a^2}-2a^3bc-a^4+1-2abc-\cancel{a^2})} =$

$= \sqrt{(abc-1)^2-(-a^4-2a^3bc+1-2abc)} = \sqrt{(abc-1)^2+a^4+2a^3bc+\underbrace{1-2}_{-1}+2abc} =$

$= \sqrt{(abc-1)^2+(abc-1)\cdot 2+a^2(a^2+2abc)+1} = \sqrt{(abc-1)(abc-1+2)+a^4+2a^3bc+1} = \sqrt{a^2b^2c^2\cancel{-1}+a^4+2a^3bc\cancel{+1}}$

$= \sqrt{a^4+2a^3bc+a^2b^2c^2} = \sqrt{(a^2+abc)^2} = |a^2+abc|$

Итак, выражение вида

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = |a^2+abc|$ Т.к. $a, b, c > 0 \Rightarrow a^2>0$ и $abc>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+abc>0 \Rightarrow |a^2+abc| = a^2+abc \Rightarrow$

$\Rightarrow a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a^2+abc$

Аналогично для $b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}$ и $c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$ получаем, что

$b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} + a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a^2+abc+b^2+abc+c^2+abc =$

$= a^2+b^2+c^2+3abc = 1+abc$

Теперь нужно сравнить

$1+abc$ и $2\sqrt{abc}$

$1+abc \vee \sqrt{4abc}$

или те:

$1-2\sqrt{abc}+abc \vee 0$

$(\sqrt{abc}-1)^2 \vee 0$

Квадрат любого действительного числа не отрицателен $\Rightarrow$

$(\sqrt{abc}-1) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+abc \geq 2\sqrt{abc} \Rightarrow$ ~~знак для неравенства~~ левая часть $\geq$ правой, а левая часть равна

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \Rightarrow$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$,

что и требовалось доказать.

+

Черновик

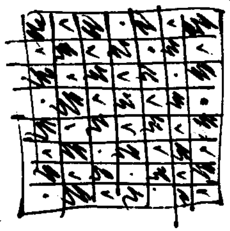
$$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a\sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2} = \sqrt{a^2-a^2b^2-a^2c^2+a^2b^2c^2} = \sqrt{a^2-a^2(b^2+c^2-b^2c^2)}$$

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$

$a^2+c^2+2abc=1-b^2$

$a(a+bc)+c(c+ab)=1-b^2$

$b(b+ac)+a(a+bc)=1-c^2$




$(ab+c)(ac+b)(bc+a)=$

$=(a^2bc+ab^2+ac^2+bc)(bc+a)=$

$=a^2b^2c^2+ab^3c+abc^3+b^2c^2+abc+a^3bc+a^2b^2+a^2c^2=$

$=a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2+abc$

$$(a(a+bc))^2+bc(b+ac)(c+ab)+ab(a+bc)(b+ac)+ac(a+bc)(c+ab)=$$

$$=a^2(a+bc)^2+bc(bc+abc+ac^2+a^2bc)+ab(ab+a^2c+b^2c+abc^2)+ac(ac+a^2b+bc^2+ab^2c)=$$

$$=a^2(a^2+2abc+b^2c^2)+b^2c^2+ab^2c^2+abc^3+a^2b^2c^2+a^2b^2+a^3bc+ab^3c+a^2b^2c^2+a^2c^2+a^3bc+abc^3+a^2b^2c^2=$$

$$=a^4+2a^3bc+a^2b^2c^2+b^2c^2+ab^2c^2+abc^3+a^2b^2c^2+a^2b^2+a^3bc+ab^3c+a^2b^2c^2+a^2c^2+a^3bc=$$

$=a^4+4a^2b^2c^2$

~~$4a^2b^2c^2$~~

f 2 5
e a
d c b

$5:|a-2| \Rightarrow a=\{1;3;7\}$
$2:|f-5| \Rightarrow f=\{3;4;5;7\} \Rightarrow (a;f)=\{(1;3);(7;4)\};$

$a=1 \Rightarrow$

f 2 5
e 1
d c b

$1:|5-b| \Rightarrow b=\{6;4\}$

$\longrightarrow$

f 2 5
e 1
d c 4

$\Sigma_{\text{всех}} = \frac{36+1}{2}\cdot 36 = 2$

$\Sigma_{\text{других}} = \frac{\frac{a_1+a_1+11}{2}\cdot 12}{2} = \frac{(2a_1+11)\cdot 6}{2} = 6a_1+33$ – Hи

Черновик

$2abc = 1 - a^2 - b^2 - c^2$

$a\ b\ c > 0$

$1 - b^2 = a^2 + c^2 + 2abc$

$1 - c^2 = a^2 + b^2 + 2abc$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a\sqrt{(a^2+c^2+2abc)(a^2+b^2+2abc)} =$

$1 - c^2 - b^2 + b^2c^2 = (1-c)(1+c) + b^2(c^2-1) = (1-c)(1+c)$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1 \quad / + a^2b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc^2 = 1$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ($

$a^2 + b^2 + (ab+c)^2 = 1 + a^2b^2$

$(ab+c)^2 = a^2b^2 + c^2 + 2abc$

36 1 2 3 4 5 = 51

10 2 3 4 5 = 60

4).

$2 : |5 - f| \Rightarrow f = 3$

$2 : |5 - f| \Rightarrow f = \{7; 4\}$

$5 : |2 - a| \Rightarrow a = \{3; 7\} \Rightarrow af = \{73; 43; 47\}$

1 3 4 6 8

1). 7 3

32 оборотные

3 2 5

$7 : |5 - b| \Rightarrow b = 1$

$3 : |2 - e| \Rightarrow e = 1$

2). 4 3

3). 7 2 5

$6 : |5 - b| \Rightarrow b = \{1; 3; 6\}$

$7 : |e - 2| \Rightarrow e = 1$

$4 : |5 - b| \Rightarrow b = \{1; 3\}$

$3 : |2 - e| \Rightarrow e = 1$

9 10

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

31 32 33 34 35 36

$5 : |2 - a| \qquad 2 : |5 - f|$

$a : |5 - b| \qquad f : |2 - e|$

50 51 52 53 54

55 56 57 58 59

60

36

+25

61

| 1 | 3 | 7 | | | 36 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 2 |
| | | | | | 4 |
| | | | | | 6 |
| | | | | | 8 |
| | | | | | 5 |

61