ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101350355271

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	■ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия РОМАНОВ

Имя АРТЕМ

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 08 04 2008

Город участия ПЕРМЬ

Аудитория 115

Телефон 89024736088

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101350355271

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 2 Количество черновиков к проверке

Время выхода с 13:21 до 13:25

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	–	–					
Балл члена жюри №2	20	20	0	–	–					

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1 **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание №2

Предположение индукции:

если:

$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+..\sqrt{a_n}=\sqrt{a_1+2a_2+..na_n}$

то

$a_i=i^2a_1 \quad (1\leq i\leq n)$

База индукции:

$n=2$

$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}=\sqrt{a_1+2a_2} \quad \Big| \uparrow^2$ возведём во 2 степен

$\cancel{a_1}+2\sqrt{a_1a_2}+a_2=\cancel{a_1}+2a_2$

$2\sqrt{a_1a_2}=a_2 \quad \Big| \uparrow^2$ возведем во 2 степень, ~~так~~ как и слева и справа полож. числа ($a_1 .. a_{2023}$ – пол. полож.)

$4a_1\cancel{a_2}=a_2^{\cancel{2}} \quad \Big| :a_2$

$4a_1=a_2$

$a_2=2^2a_1$ — верно

Переход из n в $n+1$

для n чисел:

$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}..+\sqrt{a_n}=\sqrt{a_1+2a_2..+na_n}$

$\sqrt{a_1}+\sqrt{2^2a_1}+..\sqrt{n^2a_1}=\sqrt{a_1+2\cdot2^2a_1+..n\cdot n^2a_1}$

$\sqrt{a_1}\,(1+2+...+n)=\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{(1^3+2^3+..n^3)}$

~~[illegible]~~ $(1+2+\dots n)^2 = (1^3+2^3+\dots n^3)$

Переход в $n+1$

$$\sqrt{a_1}(1+2+\dots n)+\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_1(1+2^3+\dots n^3)+(n+1)a_{n+1}} \quad \Big| \uparrow^2$$

$$\cancel{a_1(1+2\dots n)^2} + 2\cdot(1+2\dots n)\sqrt{a_1 a_{n+1}} + a_{n+1} =$$

$$= \cancel{a_1(1+2^3+\dots+n^3)} + (n+1)a_{n+1}$$

$$\cancel{2}\cdot\frac{(n+1)n}{\cancel{2}}\sqrt{a_1 a_{n+1}} = a_{n+1}(n+1-1)$$

$$(n+1)\cancel{n}\sqrt{a_1 a_{n+1}} = \cancel{n}\,a_{n+1} \quad \uparrow^2$$ (т.к. и слева и справа пол. значение.)

$$(n+1)^2 a_1 \cancel{a_{n+1}} = a_{n+1}^{\cancel{2}}$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 a_1 \ \checkmark$$

=) наше предположение индукции верно.

тогда, т.к. для $n=2023$ ~~[illegible]~~

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}\dots+\sqrt{a_{2023}} = \sqrt{a_1+2a_2+\dots 2023a_{2023}}$$

то $a_{2023} = 2023^2 a_1$

~~[illegible]~~ $$\frac{a_{2023}}{a_1} = \frac{2023^2\cancel{a_1}}{\cancel{a_1}} = 2023^2 = 4092529$$

Ответ: $\frac{a_{2023}}{a_1} = 2023^2 = 4092529$ +

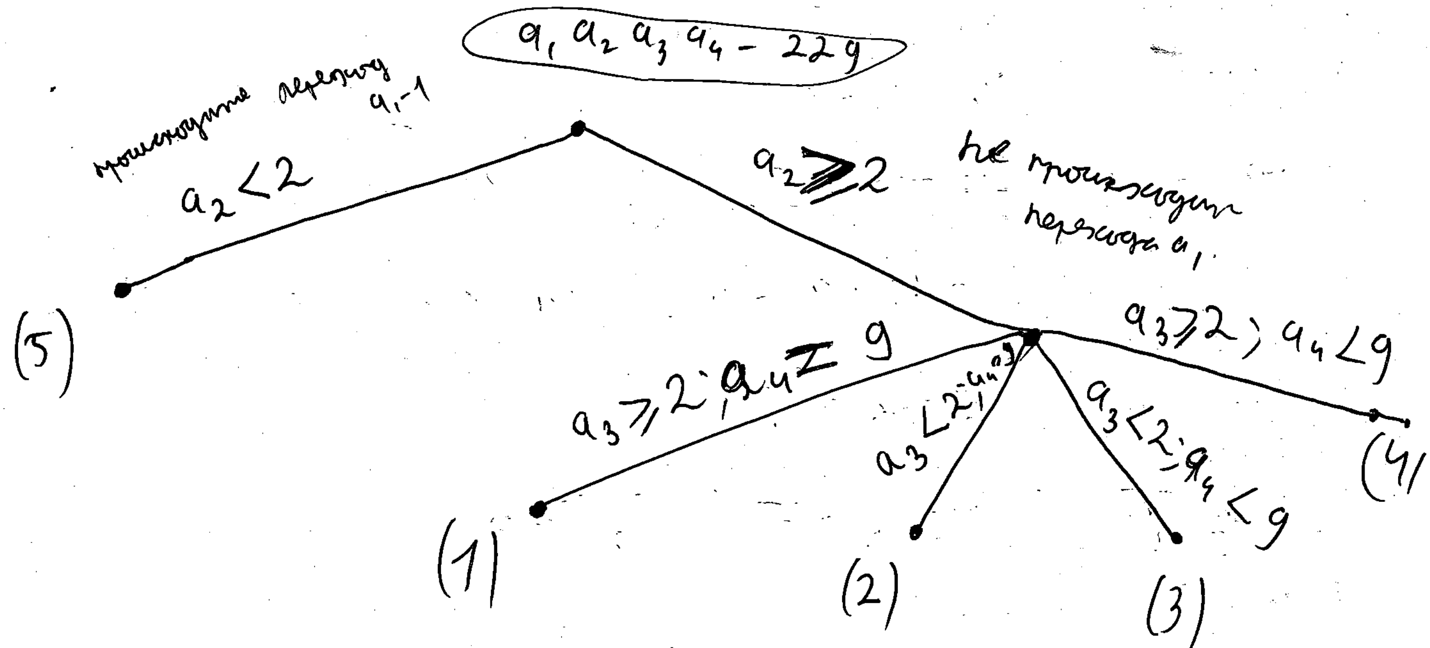
Задание №3

Пусть $a_1 a_2 a_3 a_4$ - исходная 4-ёх значная сумма.

~~т.к. после всех вз..~~

1) $\begin{array}{r} a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ -\quad 2\;\, 2\;\, 9 \\ \hline x\;\, x\;\, y\;\, z \end{array}$ — сумма на карте после первого вычета

2) $\begin{array}{r} a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ -\quad 4\;\, 5\;\, 8 \\ \hline c\;\, b\;\, e\;\, e \end{array}$ — сумма на карте после ~~двх~~ двух вычетов.



Рассмотрим 5 случаев значений ~~чисел~~ цифр $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$

1) $a_2 \geqslant 2$; $a_3 \geqslant 2$; $a_4 = 9$ (не происходит перехода a_2 на -1 разряд)

значит $a_2 - 2 = a_1$

подходят только

~~1359~~

2459

... 59

7959

1359 - не подходит, т.к.

1359 - 458 - 3-ёх значное число.

Тогда ~~$a_3 a_4$~~ ~~$2\ 9$~~ ~~$a_3 a_4$~~ ~~$2\ 9$~~

Пусть $a_3 9 - 29 = c0$

тогда

$$\begin{array}{r} \dot{c}\,0 \\ -\ 2\,9 \\ \hline \ell\,\ell \end{array}$$

$10 - 9 = 1$

$\ell = 1$

значит $c - 2 = 1$

$c = 3$

$a_3 9 - 29 = 30$

$a_3 9 = 59$

$a_3 = 5$

2) случай когда

$a_2 \geqslant 2$; $a_3 < 2$; $a_4 = 9$

значит при $a_3 a_4 - 29$ произойдёт $a_2 - 1$

то есть $a_1 = a_2 - 3$

$$\begin{array}{r} a_3\,9 \\ -\ 2\,9 \\ \hline z\,0 \\ -\ 2\,9 \\ \hline 4\,1 \end{array}$$

$z = 10 + a_3 - 2 = 8 + a_3$

$z - 2 = 1$

$8 + a_3 - 2 = 6 + a_3 \geqslant 6$

$z - 2 \geqslant 6$

$z - 2 \neq 1$

$\Rightarrow$ такого случая быть не может.

3) $a_2 \geq 2$; $a_3 < 2$; $a_4 < 9$

$a_3 < 2$, значит ~~при~~ при $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$
$\quad\quad 2 \quad 9$

$a_1(a_2-1)f\, d$

тогда $a_1 = a_2 - 3$

$$\begin{array}{r} a_3\ a_4 \\ -\ 2\ \ 9 \\ \hline f\ \ d \end{array}$$

$d = a_4 + 10 - 9 = a_4 + 1 \geq 1$

$f = a_3 - 1 + 10 - 2 = a_3 + 7 \geq 7$

$$\begin{array}{r} f\ d \\ -\ 2\ 9 \\ \hline e\ e \end{array}$$

~~$8-2 = a_3+5 \geq 5$~~

~~$d-9$~~

два случая ~~два случая~~ 1.) $d = 9$

2.) $d < 9$

1.) $d = 9$

$d - 9 = 0$

$\Rightarrow f - 2 = 0$

но $f - 2 \geq 5$ - против. $\Rightarrow$ такого случая быть не может.

2.) $d < 9$

тогда

$d + 10 - 9 = a_4 + 2$

$f - 1 - 2 = a_3 + 4$

~~a_4~~ $a_4 + 2 = a_3 + 4$

$a_4 = a_3 + 2$

~~a_3~~ 1 3

0 2

Только подходит в этом случае:

~~a_4~~ ~~2~~ при $a_4 = 1$

$a_2 = 4$

~~$a_1 a_2 a_3 a_4$ при~~

~~a_4~~ $\overline{14 a_2 a_3} \leq 1413$ | -458

$1413 - 458$ - $\overline{3}$-ёх значное

$\Rightarrow$ не подходит.

тогда:

$$\left[\begin{array}{l} 2513 \\ 2502 \\ \ldots \\ 6902 \\ 6913 \end{array}\right.$$

4) $a_2 \geq 2;\ a_3 \geq 2;\ a_4 < 9$

~~$a_1 = a_2 - 3$~~ при $a_3 > 2$ $a_1 = a_2 - 2$ при $a_3 \geq 2$ $a_1 = a_2 - 3$

$$\begin{array}{cc} a_3 & a_4 \\ -\,2 & 9 \\ \hline f & d \end{array}$$

два случая

а) $a_3 < 3$ б) $a_3 \geq 3$

а) $d = a_4 + 1$

$f = a_3 + 10 - 3 = a_3 + 7$

$$\begin{array}{cc} f & d \\ -\,2 & 9 \\ \hline e & e \end{array}$$

два случая

1) $a_4 = 8$ 2) $a_4 < 8$

1) $d - 9 = 0$

$f - 2 = a_3 + 5 \geq 5 \neq 0$ — не подх.

2) $d - 9 = 10 + a_4 + 1 - 9 = a_4 + 2$

$f - 2 = a_3 + 4$

$a_3 + 4 = a_4 + 2$

$a_3 + 2 = a_4$

a_3

24

35

46

57

Подходят:

2524

$$\left[\begin{array}{l} 2435 \\ 3535 \\ \dots \\ 7935 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2446 \\ 3546 \\ \dots \\ 7946 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2457 \\ 3557 \\ \dots \\ 7957 \end{array}\right.$$

5) $a_2 < 2;$ если $a_3 a_4 - 29 > 0$

$a_2 + 8 = a_1 - 1$

а) то $a_1 a_2 - 2 = xx$

$a_1 = a_2 + 9$

90

...

~~возможно только~~ n

если $a_2 = 0$ $a_1 = 9$

$a_2 = 1$ $a_1 = 10$ — нет.

$a_2 = 2$ — $a_1 = 11$ — нет

Доп. лист 1

если $a_2 < 2$ $a_3 a_4 - 29 < 0$

то

б) $a_1\ (a_2 - 1) - 2 = xx$

$a_2 + 7 = a_1 - 1$

$a_2 + 8 = a_1$

$\left[\begin{array}{l} 91 \\ 80 \end{array}\right.$

а) в варианте а $a_3 a_4 > 29$

и при этом

$$\begin{array}{r} a_3\ a_4 \\ -\ 5\ \ 8 \\ \hline e\ \ e \end{array}$$

если $a_4 = 8$, то $a_3 = 5$

если $a_4 < 8$, то

$e = a_4 + 10 - 8 = a_4 + 2$

$e = a_3 - 6$

$a_3 - 6 = a_4 + 2$

$a_3 = a_4 + 8$

91

80

$\left[\begin{array}{l} 90\ 80 \\ 90\ 91 \end{array}\right.$

б) в варианте б $a_3 a_4 < 29$

тогда

$$\begin{array}{r} a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \\ -\ \ \ \ \ 4\ \ 5 \\ \hline d\ \ c\ \ e\ \ e \end{array}$$

если $a_4 = 8$, то $a_3 = 5$ – прот. $a_3 \le 2$

если $a_4 = 9$, то $a_3 = 6$ – прот.

если $a_4 < 8$, то

$e = 10 + a_4 - 8 = a_4 + 2$

$e = a_3 - 1 + 10 - 5 = a_3 + 4$

$a_4 + 2 = a_3 + 4$

$a_4 - 2 = a_3 \le 2$

1

такого варианта быть не может.

$$\begin{array}{r} 120 \\ -\ 58 \\ \hline 62 \end{array}$$ – не подход.

лист 1 | 4

=) Мы расплели все варианты

и под условие подходящим значение:

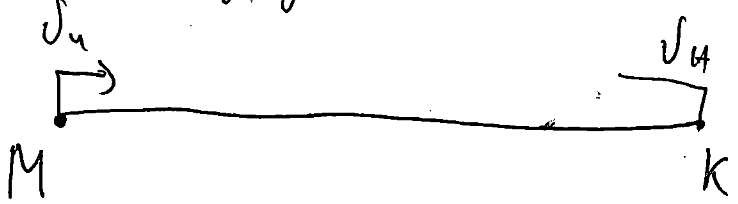
2459	2502	2524		
3559	3602	2435	2446	2452
4659	4702	3535	3546	3552
5759	5802	4635	4646	4652
6859	6902	5735	5746	5752
7959	2513	6835	6846	6852
	3613	7935	7946	7952
9080	4713			
9091	5813			
	6913			

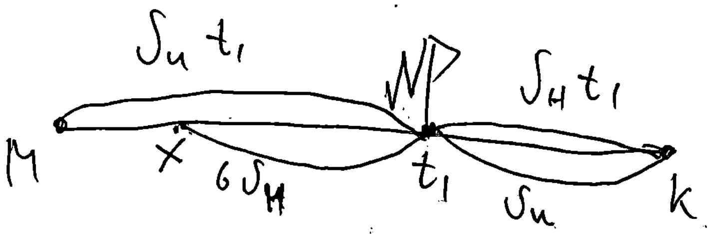
перебор ни к чему не привёл

/ все возможные варианты

~~Задание N 4~~

2т Задание N 1





Пусть S – расстояние между Муромом и Киевом

$v_И$ – скорость Ильи Муромца

$v_Н$ – скорость Настасьи

t_1 – время до их встречи

$S=(v_Н+v_И)t_1$

до места встречи (N) Настасья прошла путь $S_1=v_Н\cdot t_1$,

а Илья прошёл тот же путь за 1 час.

$$v_И\cdot 1=S_1$$

$$\boxed{v_И=v_Н\cdot t_1}$$

Пусть через 6 часов после их встречи Настасья была в точке X, тогда $MX=NK$

~~MX=~~

До места встречи Илья прошёл $S_2=v_И t_1$

$$MX=S_2-v_Н\cdot 6=v_И t_1-6v_Н=v_Н t_1^2-6v_Н$$

$v_Н t_1^2-6v_Н=v_Н t_1 \quad |:v_Н$

$t_1^2-t_1-6=0$

$D=25$ $\Rightarrow t_1=3$ часа.

$$\left[\begin{aligned} t_1&=\frac{1+5}{2}\\ t_1&=\frac{1-5}{2}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t_1&=3\\ t_1&=-2 \text{ – посторонний}\end{aligned}\right.$$

~~2ЦЭКЛЬ~~

с момента их встречи Настасье нужно пройти за t_3 путь MN

$S_2 = \upsilon_{H} t_1 = \upsilon_H t_1^2$

$S_2 = \upsilon_H \cdot t_3$

$\cancel{\upsilon_H} \cdot t_3 = \cancel{\upsilon_H} \cdot t_1^2$

$t_3 = t_1^2 = 9$

Твоесть Настасия пройдёт расстояние MN за 9 часов, она уже прошла 6 часов => ей осталось идти 3 часа.

~~В этот м~~ ~~когда Иван~~ Иван за 1 час дошёл до Киева

=> Настасье идти ещё $3-1 = 2$ часа

Ответ: 2 часа