ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302038279971

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия САФРОНОВ

Имя ИВАН

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 24 06 2006

Город участия ОРЕНБУРГ

Аудитория 412

Телефон +79313104222

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302038279971

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ОРЕНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке 01

Время выхода с 13:22 до 13:24

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	0	20	0					
Балл члена жюри №2	20	0	0	20	0					

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1

Посчитаем сумму всей таблицы: $1+2+3...+35+36 = \frac{1+36}{2}\cdot 36 = 37\cdot 18 = 666$

Обозначим наименьшую сумму из столбцов/строк за X, тогда:

$X+(X+1)+(X+2)+(X+3)+...+(X+11) = 666\cdot 2 = 1332$

Z - целые числа

$12X+66 = \cancel{666}\ 1332$

$12X = \cancel{600}\ 1266$

$X = \cancel{50}\ 105,5$

~~Значит суммы по столбцам/строкам~~ $\in [50;50+11]$, т.е. $[50;61] \in Z$

~~Рассмотрим~~ $X \in Z$, т.к. в таблице только целые числа

У нас же получилось $X \notin Z$, что противоречит условию $\Rightarrow$

+

$\Rightarrow$ Ответ: Нельзя

№3 Для удобства выпишем к каждому число его делители:

1: 1, 2: 1;2, 3: 1;3, 4: 1;2;4, 5: 1;5, 6: 6;1;2;3, 7: 7;1, 8: 2;1;4;8

Рассмотрим нашу цепочку чисел: „52" или „25" это не важно, просто цепочки получатся симметричными относительно центра.

Рассмотрим цепочку „52". После „2" может идти ~~только~~ 4 или 6 т.к. $2 \vdots |(4 \text{ или } 6) - 5|$

$524 \xrightarrow{6-2=4} 5246 \to 52463 \to 524637 \to$ тупик. √

$5246 \to 52467$ — тупик

$524 \to 5241$

$524 \xrightarrow{3-2=1} 5243 \xrightarrow{7-4=3} 52437$ × тупик, т.к. 2 и 4 уже использованы √

$5243 \xrightarrow{4-1=3} 52431$ × тупик, т.к. 2 и 4 уже использованы.

$524 \xrightarrow{4-2=4}$ не сущ. т.к. в 5244 — две "4" (некоторые ветки отпадают по аналогии)

$526 \to 5268 \to 52687 \to 526871$ ×

$5268 \to 52684$

$526 \to 5264 \to 52647 \to 526473 \to 5264738 \to 52647381$ × т.к. $1 \not\vdots (8-5)$ √

$5264 \to 52648 \to 526483 \to 5264837$ × $7 \not\vdots (3-1)$

$526 \to 5263 \to 52637 \to 526374 \to 5263748$ × $8 \not\vdots (4-1)$ √

$526 \to 5261 \to 52617 \to 526178 \to 5261783$ × $3 \not\vdots (8-4)$ √

Также после 2 могут стоять „7" и „3"

см. далее →

См. далее

Бланк ответов Задача №3 (продолжение)

527 → 5273 → 527~~3~~36 → 527361 ×

5273 → 52738

5273 → 52734 → 527341 ×

52736 → 527364 → 5273648 ×

527 → 5271 → 52716 → 527164 → 5271648 → 52716483

52716 → 527163 ×

5271 → 52718 ×

523 → 5231 → 52314 → тупик. ✓

Итого перебрав всего около 16 вариантов мы нашли единственную подходящую цепочку:

3 5 2
8 7
4 6 1

$$\left.\begin{aligned}|5-7|&=2\\|2-1|&=1\\|7-6|&=1\\|1-4|&=3\\|6-8|&=2\\|4-3|&=1\\|8-5|&=3\\|3-2|&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}2&:2\\7&:1\\1&:1\\6&:3\\4&:2\\8&:1\\3&:3\\5&:1\end{aligned}\right.$$

перебор неполный

(также эта цепочка может быть отражена, т.е.:

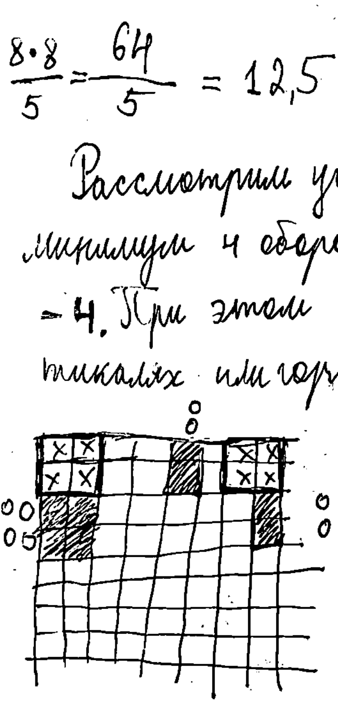
2 5 3
7 8
1 6 4

Ответ: ч.т.д.

№4 Рассмотрим для начала какое минимальное количество фигур нам надо:

$\frac{8\cdot 8}{5}=\frac{64}{5}=12,5$ (делим на 5, т.к. оборотень атакует 5 клеток) округляем и получаем 13

Рассмотрим угол поля: чтобы заполнить угол ~~поля~~ 2×2 клетки нам необходимо минимум 4 оборотня, т.к. один не может покрывать двух соседних клеток, а всего клеток — 4. При этом эти 4 ~~клетки~~ фигуры должны стоять на крайних двух ~~[illegible]~~ вертикалях или горизонталях (см. рисунок), т.к не бьют по диагоналям. Следовательно рядом с каждым углом образуется 4 удара за полем.



▨ - фигура

☒ - удар

o – удар за полем

← два варианта расстановки для удара угла 2×2

№5 задача выполнена на черновике

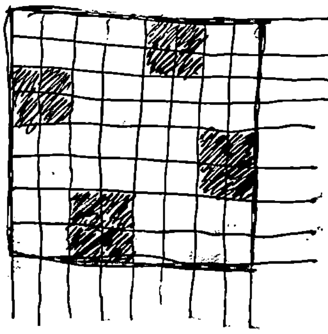
см далее

 Задача №4 продолжение

Всего углов: 4, а значит у нас 4·4=16 ударов в пустоту.

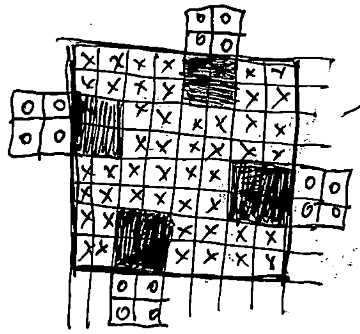
Следовательно нужно фигур $\frac{64+16}{5} = \frac{80}{5} = 16$ фигур (минимум)

Приведём пример такого положения.



– оборотень
– удар
| – граница поля
– удар в пустоту

поле без ударов



– пример

поле с ударами

Ответ: 16 оборотней – минимальное количество, для атаки всех полей доски.

№2 $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

т.к. числа положительные, то это возможно только когда 2 числа из [a, b, c] равны 0, а третье = 1 (I), или когда все три числа $\in [0; 1)$ и $a\cdot b\cdot c \leq 0{,}5$ (II)

Рассмотрим нашу функцию: $f(a,b,c)=a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$

неверно, a, b, c – нецелые

Она будет чётной, т.е. $f(a,b,c)=f(c,b,a)=f(a,c,b)=f(c,a,b)=f(b,c,a)=f(b,a,c)$

значит достаточно рассмотреть: $a=0, b=0, c=1$ для (I) условия.

⇓

$$0\cdot\sqrt{(1-0)(1-1)} + 0\sqrt{(1-1)(1-0)} + 1\sqrt{(1-0)(1-0)} \geq 2\sqrt{1\cdot 0\cdot 0}$$

$$1 \geq 0$$

⇓

для (I) доказано ч.т.д.

(II) Возведём в квадрат:

неверно

$$a^2+2ab+b^2+c^2((1-a^2)(1-b^2)) + \sqrt{1-c^2}\left(ac\cdot(1-b^2)\cdot\sqrt{1-a^2} + bc\sqrt{1-b^2}\cdot(1-a^2)\right) \geq 4abc$$

$$(2\sqrt{abc})^2 = 4abc = 2-2a^2-2b^2-2c^2$$

Подставим

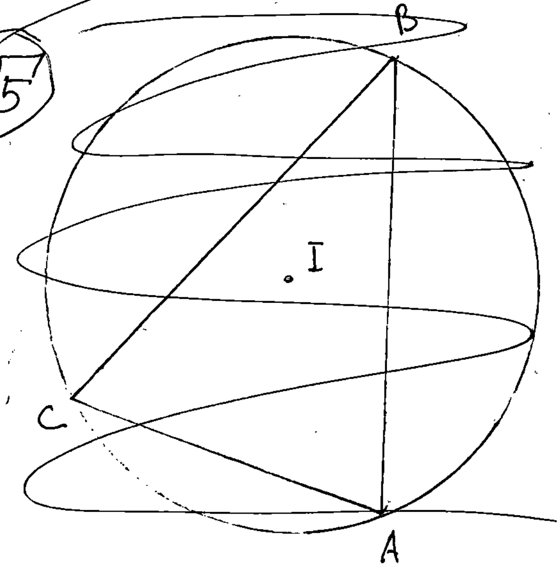
$$\underline{a^2+2ab+b^2+c^2((1-a^2)\cdot(1-b^2))} + \underline{\sqrt{1-c^2}\left(ac\cdot(1-b^2)\cdot\sqrt{1-a^2} + bc\sqrt{1-b^2}\right)} \geq 2$$

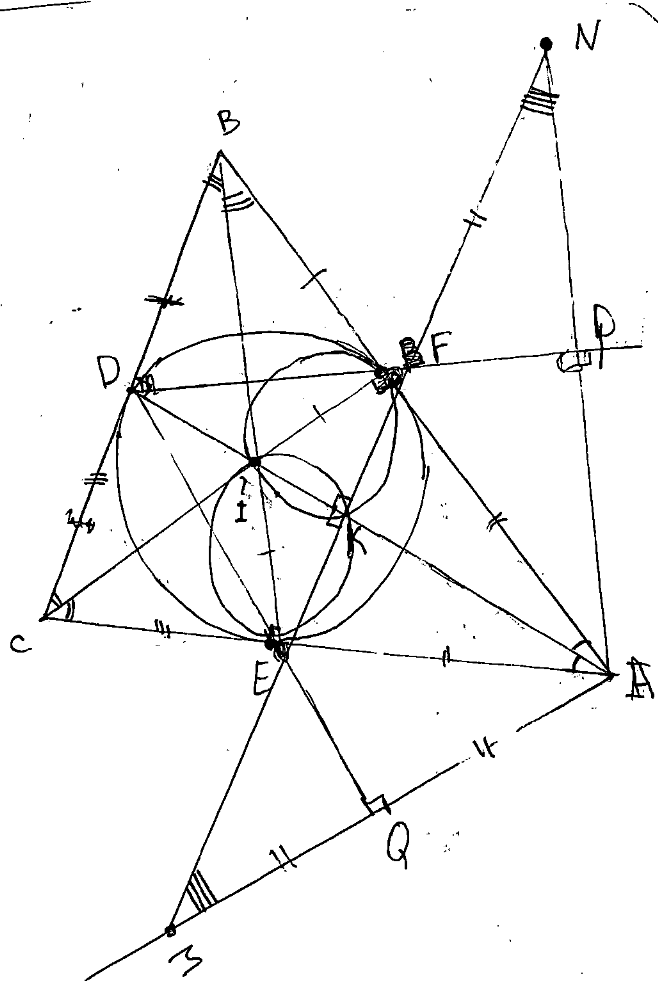
Раз $a^2+b^2+c^2+2abc=1$, а $a\in[0;1)$, $b\in[0;1)$, $c\in[0;1)$, то обе подчёркнутые части ≥ 1 ⇒

⇒ $(\geq 1) + (\geq 1) \geq 2$ ч.т.д.

Ответ: ч.т.д.

№5





Вписанная окружность (центр) лежит в точке пересечения биссектрис

$\angle K = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр

$AE = FA$; $BF = BD$; $DC = AC$, т.к. расстояния от точки через касательные

$AK = FA \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\angle A) \cdot EA$

$NP = PA = AQ = QM$ т.к. ~~AQ = QM, NP = PA~~ и ~~NF = PA~~ $NP = PA$ и $AQ = QM$ и $FA = EA$

$\Downarrow$

$FE \in MN$ неверно

Рассмотрим маленькие круги

$K \in AI$

K будет лежать на FE, т.к. r маленьких кругов $= \frac{1}{2}$ r большого круга

т.к. в противном случае эти будут не круги.

почему?

Ответ: ч.т.д.

$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \mid 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34$

55 135 20 225 30 130 65 71

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$

~~a_1+a~~

1.

190 210 435 465 530 +65

$55+135+20+225+30+65+71=666$

$\frac{1+36}{2}\cdot 36 = \frac{37}{2}\cdot 36 = 37$

$\times 18$

296

37

$\boxed{666}$

66

$\times 666$
2
1332
-66
1266
-12
66
$1266 : 12 = 105,5$

1

$x, x+1, x+2, x+3, \dots x+11 = 12x + (1+2+\dots+11) = 666$

61

$12x = 600$

$\boxed{x=50}$

$600 : 12 = 50$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=50$

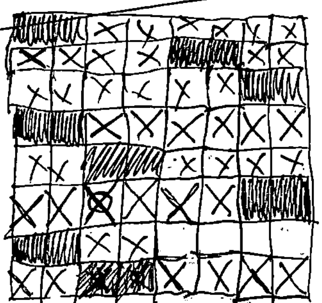
$a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=51$

$61-36=25$

$36+15=51$

$36+40=76$

$55+36=\boxed{91}$



$64 : 5 = 13$

13 мин

$\sqrt{2}$

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$?

? подумать (мабо варіанти або формулу)

$2abc = 1-a^2-b^2-c^2$

$\sqrt{3}$

$1 \to 1$

$2 \to 2,1$

$3 \to 3,1$

$4 \to 2,1,4$

$5 \to 5,1$

$6 \to 6,3,2,1$

$7 \to 7,1$

$8 \to 8,4,2,1$

~~$9 \to 3,9,1$~~

1 3 7 52 4 6

~~5241~~

526 1 5 7 4

526178 x

5267 x

5269 v

5246 v

5243 → 52437 x

524637

5246 3 7