ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101401439040

Титульный лист

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия СМИРНОВА

Имя ДАРЬЯ

Отчество АЛЕКСЕЕВНА

Дата рождения 02 02 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 325

Телефон 89110034365

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101401439040

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	0	20	0	0	0					
Балл члена жюри №2	0	20	0	0	0					

Итоговый балл 20

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1

÷ 1-36 ; $S_1 = \frac{1+36}{2}\cdot 36 = 666$ — сумма всех чисел в квадрате

÷ $a_1 - a_{12}$ ← 12 сумм по горизонтали и вертикали, последовательные числа

$S_2 = \frac{2a_1+11}{2}\cdot 12 = 12a_1+66$

неверно

$S_1 = S_2$; $12a_1+66=666$

$\underline{a_1 = 50}$, значит суммы равны $\overbrace{50, 51, 52 \ldots 60, 61}^{12\text{ шт.}}$

В каждом столбце или строке будет хотя бы одно большое число (т.е. 25-36)

например:	макс. ч.
61	36
60	35
⋮	⋮
52	27
51	26
50	25

тогда максимальный возможный остаток ~~50~~ $61-36=\underline{25}$ — сумма оставшихся 5ти чисел

НО! у строки и столбца 1 общая клетка и будет весь набор, где минимальная сумма максимальных чисел $= 26+25=51$, что больше минимальной суммы $= 50$

Следовательно невозможно так расставить числа

Ответ: нет, нельзя

Задание 2

$a>0,\ b>0,\ c>0$; $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ $\Longrightarrow$ $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$

Д-ть: $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$

обе части неравенства положительны, значит можно возвести все в квадрат

$a^2 - a^2c^2 - a^2b^2 + a^2b^2c^2 + b^2 - b^2c^2 - a^2b^2 + a^2b^2c^2 + c^2 - a^2c^2 - b^2c^2 + a^2b^2c^2 +$

$+ \underbrace{\left(2ab(1-c^2)\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} + 2bc(1-a^2)\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + 2ac(1-b^2)\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}\right)}_{>0} \geq 4abc$

$a^2+b^2+c^2 = 1-2abc$ по усл.

$3a^2b^2c^2 + 1 - 2abc - 2\underbrace{(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)}_{=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2-a^4-b^4-c^4}{2}} + \underbrace{\left(2ab\sqrt{-\|-} + 2bc\sqrt{-\|-} + 2ac\sqrt{-\|-}\right)}_{>0} \geq 4abc$

$2abc = 1 - \underbrace{(a^2+b^2+c^2)}_{>0}$

$2abc < 1$

$6abc < 3$

$3a^2b^2c^2 + 1 - \underbrace{(a^2+b^2+c^2)^2}_{=1-2abc} + a^4+b^4+c^4 + \underbrace{(-\|-)}_{>0} \geq 6abc$

$3a^2b^2c^2 + 1 - 1 + 4abc - 4a^2b^2c^2 + a^4+b^4+c^4 + (-\|-) \geq 6abc$

$\boxed{a^4+b^4+c^2 - a^2b^2c^2 + (-\|-) \geq 2abc}$

продолжение решения см. на обороте!

~~Рассмотрим левую часть неравенства:~~

$$a^4+b^4+c^4-a^2b^2c^2+\left(2ab(1-c^2)\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+2bc(1-c^2)\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+2ac(1-b^2)\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}\right) \geq 2abc$$

$abc \leq 1$

$= 1-(a^2+b^2+c^2)$

$$1-a^2 = b^2+c^2+2abc$$

т.к. $c<1$, то $2abc < 2ab$

т.е. $(b+c)^2 > b^2+c^2+2abc$

$(b+c)^2 > 1-a^2$, аналогично $(a+b)^2 > 1-c^2$

$(a+c)^2 > 1-b^2$

$$(1-a^2)(1-b^2) = 1-a^2-b^2+a^2b^2 = \underbrace{c^2+2abc}_{\text{по усл.}}+a^2b^2 = (c+ab)^2$$

Левая часть:

$$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} =$$

$$= a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab) =$$

$$= a^2+b^2+c^2+3abc = 1+abc$$

$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = \sqrt{(c+ab)^2} = |c+ab|$, но

$c \geq 0,\ a \geq 0,\ b \geq 0$

значит $= c+ab$

~~$1+abc > 1$~~

~~$abc = \left(\frac{1}{2}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)$ т.е. $abc \leq \frac{1}{2}$~~

~~$\sqrt{abc}$~~

$$\boxed{1+abc \geq 2\sqrt{abc}}$$

$$1-2\sqrt{abc}+abc \geq 0$$

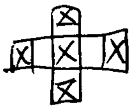
$$(1-\sqrt{abc})^2 \geq 0$$

всегда

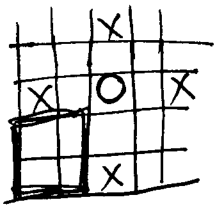
ч.т.д.

Задача 4

8×8 = 64 - клеток всего



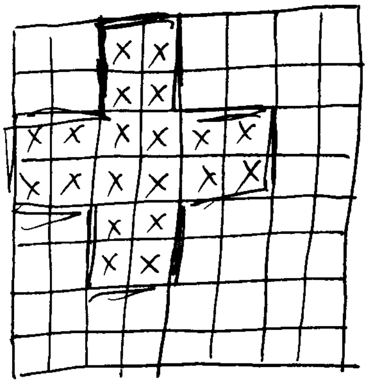
1об. бьет 5 клеток

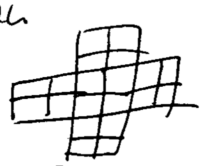


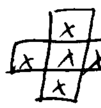
но! чтобы побить угловые 4 клетки „поле" оборотня выходит за доску всегда (минимум на 1 клетку)

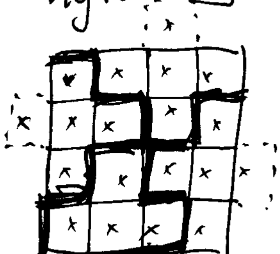
т.е. без повторений всего 64+16 = 80 клеток, которые должны побить оборотни

$\frac{80}{5}$ = 16 - минимальное число оборотней, если 2 об-ня не будут бить одну и ту же клетку



4 оборотня без повторений бьют такую площадь:  И что?

пусть □ = ⊞ и четверка оборотней равна 



~~тут только 4 клетки центра четверки оборотней (то есть можно разместить ровно 6 поле только 4х~~ ~~но они тогда не покрывают углы доски значит таких четвёрок больше четырех и минимум = 5~~

~~пример~~

всего клеток 16, минимум 4 четверки оборотней (вот таким образом)

Значит минимальное кол-во оборотней действительно 16

Ответ: 16 примера нет

Задача 5

Пусть 4 и 6 не стоят рядом, тогда 3 случая:

I $4x6$

II $4xy6$

III $4xyz6$

(I) $4x6$

$6-4=2$, 25 - уже есть, значит остается 8

486

6: 1, 2, 3, 6

$8-1=7$ — ~~[illegible]~~ где 4867?

$8-2=6$ —

$8-3=5$ 748652 - не подх

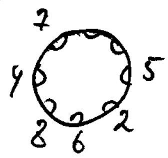
$8-6=2$ 748625

4: 1, 2, 4

$8-1=\underline{7}$

$8-2=6$ ⊖

$8-4=4$ ⊖



ост.: 1 и 3

47135 2
не подх.

473152
не подх

$4x6$ - не возможно

(II) $4xy6$

$4\,{}^{25}_{52}\,6$ - не подх.; остались 1378

$4\,{}^{13}_{31}\,6$ ⊖ 1, 3, 7, 8 остались

$4\,{}^{78}_{87}\,6$ ⊖ Почему это все варианты?

$4\,{}^{73}_{37}\,6$ ⊖

$4\,{}^{83}_{38}\,6$ ⊖ 4736 подходит

$4\,{}^{87}_{78}\,6$ ⊖

$4\,{}^{18}_{81}\,6$ ⊖

$4xy6$ - не возможно

III

$\overset{abc}{4xyz6}$

$x : |4-y|$ $\quad$ $a : |b-4|$

$y : |x-z|$ $\quad$ $b : |a-c|$

$z : |6-y|$ $\quad$ $c : |6-b|$

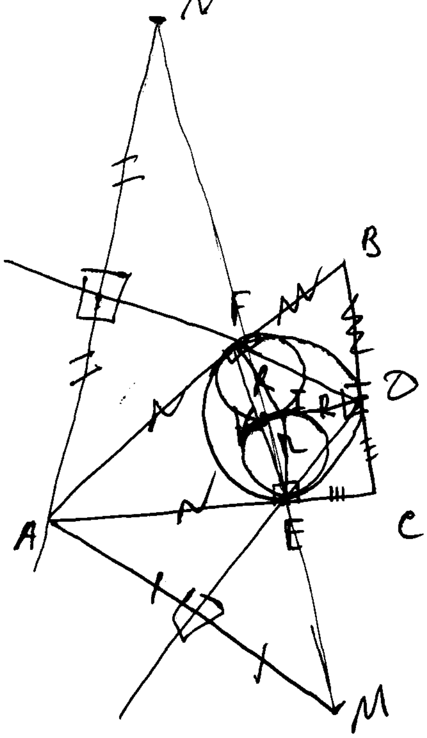
$4 : |a-x|$

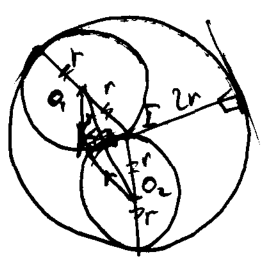
$6 : |z-c|$

$y : x - z = n(4-y) - k(6-y) = 4n - ny - 6k + ky = (k-n)y + 4n - 6k$

Неполный перебор

Задание 5





O_1IO_2K — ромб

$O_1O_2 \parallel FE$ (ср. линия)

$KI \perp O_1O_2$; $KI \perp EF$,