ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101803551449

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия БЛИНОВ

Имя ТИМОФЕЙ

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 07 10 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И-405

Телефон +79221209029

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101803551449

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	0	–					
Балл члена жюри №2	20	20	20	0	–					

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№2

Докажем, что $\sqrt{a_k}=k\sqrt{a_1}$ методом мат. индукции

БИ: $k=1$; $\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$ - верно

ПИ: ПРЕДПОЛОЖИМ, ЧТО МЫ ДОКАЗАЛИ, ЧТО $\sqrt{a_k}=k\sqrt{a_1}$

ШИ: ДОКАЖЕМ, ЧТО ТОГДА $\sqrt{a_{k+1}}=(k+1)\sqrt{a_1}$

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}=\sqrt{a_1+2a_2+\ldots+ka_k+(k+1)a_{k+1}}$$

$$\sqrt{a_1}+2\sqrt{a_1}+\ldots+k\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{k+1}}=\sqrt{a_1+2^3a_1+3^3a_1+\ldots+k^3a_1+(k+1)a_{k+1}}$$

$$\sqrt{a_1}(1+2+\ldots+k)+\sqrt{a_{k+1}}=\sqrt{a_1(1^3+2^3+\ldots+k^3)+(k+1)a_{k+1}}$$

ПО ФОРМУЛЕ $1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, а $1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ (доказательство приведено ниже)

$$\sqrt{a_1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+\sqrt{a_{k+1}}=\sqrt{a_1\cdot\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)a_{k+1}}$$

$$\left(\sqrt{a_1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+\sqrt{a_{k+1}}\right)^2=a_1\cdot\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)a_{k+1}$$

$$\cancel{a_1\cdot\frac{k^2(k+1)^2}{4}}+\cancel{2}\cdot\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_{k+1}}\cdot\frac{k(k+1)}{\cancel{2}}+a_{k+1}=\cancel{a_1\cdot\frac{k^2(k+1)^2}{4}}+(k+1)a_{k+1}$$

$$\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_{k+1}}\cdot\cancel{k}(k+1)=ka_{k+1}$$

$$\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_{k+1}}=\cancel{k}\,a_{k+1};\quad \sqrt{a}\cdot(k+1)=\sqrt{a_{k+1}}$$ - доказано

Тогда $\sqrt{a_{2023}}=2023\sqrt{a_1}$; $a_{2023}=2023^2a_1$; $\frac{a_{2023}}{a_1}=2023^2$ +

- ТЕОРЕМА: $1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$

ДОКАЖЕМ МЕТОДОМ МАТ. ИНДУКЦИИ:

БИ: $1^3=\frac{1^2\cdot2^2}{4}$ - верно для $k=1$

ПИ: ПРЕДПОЛОЖИМ, ЧТО УТВ. ВЕРНО ДЛЯ $k=n$

ШИ: ДОКАЖЕМ ДЛЯ $k=n+1$:

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=(k+1)^2\cdot\frac{(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$ - доказано

+

ОТВЕТ: $\frac{a_{2023}}{a_1}=2023^2$

№3

$\overline{abcd}\Rightarrow\overline{eeef}\Rightarrow\overline{ghhh}$; $\overline{ghhh}+229=\overline{eeef}$; ~~чтобы в разряде сотен и десятков цифры получились одинаковые, h должно быть равно~~ 8 ~~, чтобы разряд десятков увеличился~~

Разберем все возможные значения h:

$$\begin{array}{r}+9000\\229\\\hline 9229\end{array}\quad h=0 \Rightarrow g=2$$

$$\begin{array}{r}+9111\\229\\\hline 9340\end{array}\quad \cancel{h=1}$$

$$\begin{array}{r}+9222\\229\\\hline 9451\end{array}\quad h\neq 2$$

$$\begin{array}{r}+9333\\229\\\hline 9562\end{array}\quad h\neq 3$$

$$\begin{array}{r}+9444\\229\\\hline 9673\end{array}\quad h\neq 4$$

$$\begin{array}{r}+9555\\229\\\hline 9784\end{array}\quad h\neq 5$$

$$\begin{array}{r}+9666\\229\\\hline 9895\end{array}\quad h\neq 6$$

$$\begin{array}{r}+9777\\229\\\hline (g+1)006\end{array}\quad h=7 \Rightarrow g+1=0 \text{ – противоречие}$$

$$\begin{array}{r}+9888\\229\\\hline (g+1)117\end{array}\quad h=8 \Rightarrow g+1=1;\ g=0 \text{ – противоречие}$$

$$\begin{array}{r}+9999\\229\\\hline (g+1)228\end{array}\quad h=9;\ g+1=2;\ g=1$$

При $h\in\{1;2;3;4;5;6\}$ в разрядах десятков и сотен получаются разные цифры, чего не может быть

Тогда у нас 2 случая:

① $\overline{ghhh}=2000$
$\overline{eeef}=2229$
$\overline{abcd}=\overline{eeef}+229=\begin{array}{r}+2229\\229\\\hline 2458\end{array}$

② 1999
$\overline{eeef}=2228$
$\overline{abcd}=\overline{eeef}+229=\begin{array}{r}+2228\\229\\\hline 2457\end{array}$

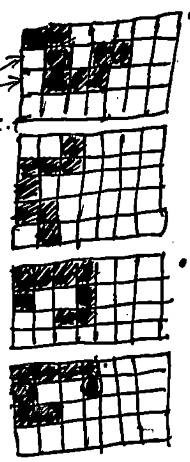
Ответ: 2458 или 2457 рублей +

№ 4

Нет, не существует

Рассмотрим клетку в углу: она принадлежит либо фигуре "червякс", либо фигуре "червяшка"

рис.1



• Если она принадлежит "червяку", то ни в одном из случаев мы не сможем закрасить все клетки, тк либо останется клетка в углу, либо 2 соседних клетки, указанные на рис.1, и верхнюю из них мы точно не сможем занять имеющимися фигурами

• Если же она принадлежит "червяшке"

см

№ 1

x – расстояние от Мурома до места встречи   a – скорость Ильи М.
L – расстояние между Муромом и Киевом   b – скорость Настасьи М.

$\frac{x}{a}=\frac{L-x}{b}$ $\frac{L}{b}-\frac{L}{a}-6$?

$\frac{L}{b}-\frac{L}{a}-6=\frac{L-x}{b}-\frac{L-x}{a}$; $\frac{L}{b}-\frac{L}{a}-6=\frac{L}{b}-\frac{x}{b}-\frac{L}{a}+\frac{x}{a}$; $\frac{x}{b}-\frac{x}{a}=6$; $x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=6$;

$x=\frac{6ab}{a-b}$; также $x=a+6b$; $a+6b=\frac{6ab}{a-b}$; $(a+6b)(a-b)=6ab$; $a^2+\cancel{6ab}-ab-6b^2=\cancel{6ab}$;

$a^2-ab-6b^2=0$; $a_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2+24b^2}}{2}=\frac{b\pm5b}{2}$, $a>0$ и $a=\frac{6b}{2}=3b$; $\frac{x}{a}=\frac{L}{b}-\frac{x}{b}$;

Тогда $\frac{L}{b}-\frac{L}{a}-6=\frac{3L}{3b}-\frac{L}{3b}-6=\frac{2L}{3b}-6$; $\frac{L}{b}=\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{4x}{3b}$

$\frac{2L}{3b}-6=\frac{8x}{9b}-6$ откуда. А т.к. $\frac{8x}{9b}-6+1=\frac{x}{a}=\frac{3x}{9b}$; $\frac{5x}{9b}=5$; $\frac{x}{b}=9$

$\frac{8x}{9b}-6=\frac{8}{9}\cdot\frac{x}{b}-6=\frac{8}{9}\cdot9-6=2$ч   Ответ: 2ч

+

Бланк ответов