ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101632350352

Титульный лист

Направление
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Фамилия СЫРЧИН

Имя АНДРЕЙ

Отчество ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 04 04 2007

Город участия УФА

Аудитория 9-101

Телефон 89991327166

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101632350352

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Город участия УФА

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	–	4	0					
Балл члена жюри №2	20	20	–	6	0					

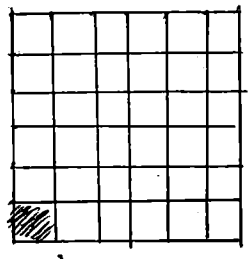
Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1



Пусть мы можем расставить числа от 1 до 36 в квадрат 6×6, так, чтобы 6 сумм по горизонтали и 6 сумм по вертикали в некотором порядке являлись 12 последовательными числами.

Пусть это числа $x; x+1; x+2; x+3; \dots x+11 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ их сумма $x+(x+1)+(x+2)+\dots+x+11 =$

$= 12x + \frac{11\cdot 12}{2} = 12x+66$, но заметим, что каждое число здесь посчитанно дважды, обратимся к закрашенной клетке: она входит в сумму по своему столбцу и своей строке $\Rightarrow$ она посчитана дважды, и так, аналогично, со всеми клетками $\Rightarrow$ сумма наших последовательных чисел равна $\frac{12x+66}{2} = 6x+33$;

Первое – итак сумма послед. чисел

Второе – она же, уменьшенная в 2 раза

Сумма чисел от 1 до 36: $\frac{36\cdot 37}{2} = 18\cdot 37 = 666 \Rightarrow$

$\Rightarrow 666 < 6x+33 \Rightarrow x = \frac{222-11}{2} = 105\frac{1}{2} \Rightarrow x \notin N$, но т.к. наши числа должны были быть последовательными $\Rightarrow x \in N$ – противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нельзя так расставить числа от 1 до 36 в квадрате 6×6.

(учтем, что раз наши последовательные числа равны сумме либо в столбце, либо в строке $\Rightarrow x \in N$; $x+1 \in N$ и т.п., т.к. $1, 2, 3, \dots 36 \in N$).

Ответ: нельзя.

№2

$a_{2023}^2+1 \le 2a_1$; пусть нет такого i, где $1 \le i \le 2022$ и $a_i^2 \ge 2a_{i+1}-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ любое n, где $1 \le n \le 2022$ и $a_n^2 < 2a_{n+1}-1$ удовлетворяет условию,

тогда $a_{2022}^2+1 < 2a_{2023}$, вспомним неравенство Коши:

$a^2+b^2 \ge 2ab \Rightarrow a_{2022}^2+1 \ge 2a_{2022} \Rightarrow$ т.к. $a_{2022}^2+1 < 2a_{2023} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_{2023} > 2a_{2022} \Rightarrow a_{2023} > a_{2022}$; аналогично, т.к. $a_{2021}^2 < 2a_{2022}-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{2022} > a_{2021}$; $a_2 > a_1 \Rightarrow a_{2023} > a_1$

Вспомним изначальное условие, что $a_{2023}^2+1 \le 2a_1$, где

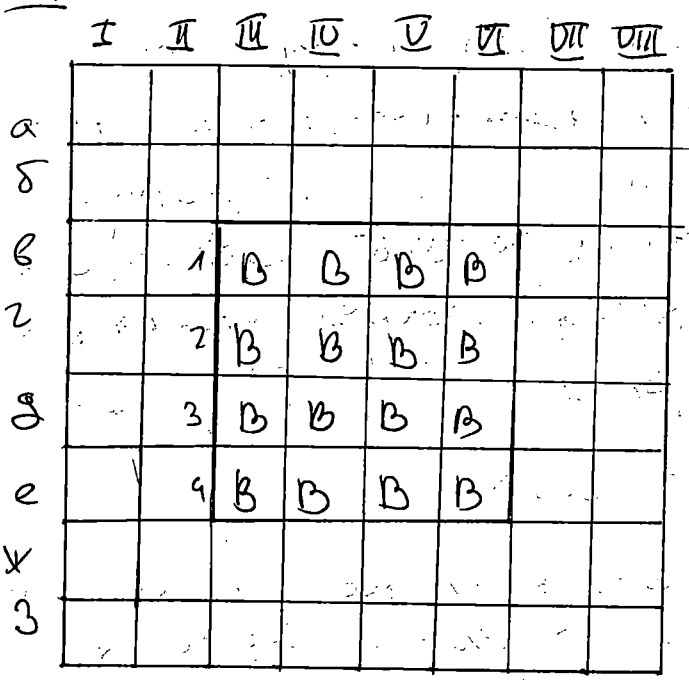
$a_{2023}^2+1 \ge 2a_{2023} \Rightarrow 2a_{2023} \le 2a_1 \Rightarrow a_{2023} \le a_1$ (продолжение на обороте листа)

Мы получили, что $\begin{cases} a_{2023} \le a_1 \\ a_{2023} > a_1 \end{cases}$ ⇒ противоречие ⇒

⇒ наше предположение неверно ⇒ найдется (а т.е. существует) такое i, где $1 \le i \le 2023$ и $a_i^2 > 2a_{i+1} - 1$. +

2.т.9

№4



Обозначим столбцы квадрата 8x8 от I до VIII (как на рис.) и строки от а до з (как на рис.)

Можно разделить доску 8x8 на квадраты 5x5, где квадраты могут перекрывать друг друга (т.е. есть общие клетки);

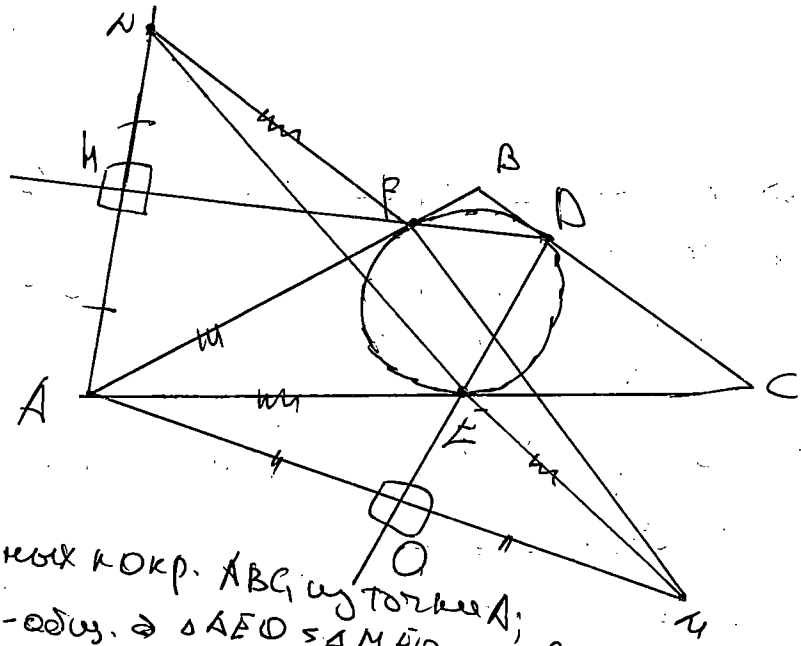
~~Заметим, что в квадрате~~ Заметим, что вампир может максимум бить 5 клеток: 1 клетка, на которой он стоит, и еще 4 клетки по диагонали (как показано на рисунке (рис.) из условия), следовательно, в квадрате 5x5 максимум вампир бьет 5 клеток, также в квадрате 8x8 всего 16 квадратов 5x5, их центры расположены (т.к. вампир бьет 5 клеток если стоит в центре квадрата 5x5) в центральном квадрате 4x4 (как выделено на рисунке) следовательно, вампиров "выгодно" (Почему?) ставить в этот центральный квадрат 4x4; заметим, что при постановке на все 16 клеток центрального квадрата 4x4 (на рис. выделено), то вампиры 1 строчки (как показано на рисунке) бьют строчки а и д, вампиры 2-й строчки бьют строчки б и е (т.е. все клетки строчки) квадрата 8x8 и т.д. следовательно, вампиры бьют все клетки доски 8x8. Также подметим, что все клетки снаружи центрального квадрата 4x4, биты 1 раз 1-м вампиром, т.е. клетка ~~б; VII~~ (б; VII) бьется 1 раз только вампиром (г; V) и аналогично ~~со всеми~~ со всеми такими клетками ⇒ если убрать хоть одного вампира, то найдется такая клетка, которая не побита ни одним вампиром ⇒ все 16 вампиров должны быть для побития всех клеток (и их достаточно) ⇒ ~~всего~~ (след. стр.)

⇒ min количество вампиров – это 16.
Не доказано
Оптимальность для внеш. квадрат. – Ответ: 16 вампиров.
но почему внутри 4×4 оптимальная расстановка – загадка

№5

Т.к. a и b – натуральные числа ⇒ a и b содержат x цифр в своей записи, где x ⋮ 2; если a·b, то цифр записи a·b будет 2x−1, где x – нечетное ⇒ ⇒ 2x−1 тоже нечетное; это происходит потому что при ~~умн~~ умножении одноразрядных чисел, т.е. у них одинак. количество цифр ~~в их~~ в их записи, цифр в записи их произведения не может быть в 2 раза больше, чем кол-во цифр в их изначальной записи, за исключением разряда единицы (т.е. 9·9=27). ~~Зн~~ Значит, при умножении a на b мы получим тоже нечетное количество цифр в записи этого числа.

№3



NE не лежит на прямой MN (рис неточный).

$AN \perp DF$; $DE \perp AM$;

пусть AM и DF пересекаются в H, а DF и AM пересекаются в O;

$AF = AE$, как отрезки касательных к окр. ABC, из точки A;

$AO = OM$ по усл. и EO - общ. $\Rightarrow \triangle AEO = \triangle MEO$ по двум катетам $\Rightarrow$

$\Rightarrow AE = EM = AF$;

$HA = HN$ (усл.) и HF - общ. $\Rightarrow \triangle FHN = \triangle FHA$ по двум катетам $\Rightarrow$

$\Rightarrow FN = FA = AE = EM \Rightarrow EM = NF$; ~~$\triangle AEO = \triangle AFH$, т.к. $AE = AF \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ они равны по катету~~ $\Rightarrow$ ~~$AM = HN = AO = OM \Rightarrow AN = AM \Rightarrow$~~

Бланк ответов