ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101316951842

Титульный лист

Направление
- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Фамилия ЯТЧЕНКО

Имя КИРИЛЛ

Отчество ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

Дата рождения 03 01 2007

Город участия КУРГАН

Аудитория 401

Телефон 89195643490

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101316951842

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия КУРГАН

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	0	18	25	25						
Балл члена жюри №2	0	18	25	25						

Итоговый балл 68

Подпись члена жюри №1 Шг

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№4

$\forall i,k \quad (i, i+k) = (i,k)$, где $(a,b) = gcd(a,b)$

$\Rightarrow F(n,k) = \sum_{i=1}^{n} (i,k)$

1) $F(7,7) = \sum_{i=1}^{7}(i,7) = 6\cdot 1 + 7 = 13$ + (т.к. 7 — простое $\Rightarrow (\forall i \in [1,6], i\in\mathbb{Z} \Rightarrow (i,7)=1)$ и $(7,7)=7$)

2) $1024 = 2^{10}$

$F(1024,1024) = \sum_{i=1}^{1024}(i,1024) = \sum_{i=1}^{1024} 2^{V_2(i)}$, где $V_2(i)$ — степень вхождения 2 в i

потому что $i \le 2^{10} \Rightarrow V_2(i) \le 10$, и $1024 = 2^{10}$ — не имеет делителей кроме степеней 2

Среди $i=1,\dots,1024$ только для одного i $2^{V_2(i)} = 2^{10}$ (для $i=1024$)

+ 258

Заметим, что среди $i=1,\dots,1023$ ровно 2^{9-k} чисел i, для которых $V_2(i)=k$, т.к. всего ровно 2^{10-k} чисел i, для которых $V_2(i)\ge k$, а среди них ровно 2^{9-k} чисел j, для которых $V_2(j)\ge k+1 \Rightarrow$ ровно $2^{10-k}-2^{9-k} = 2^{9-k}$ чисел i таких, что $V_2(i)=k$

Тогда $F(1024,1024) = 1\cdot 2^{10} + \sum_{k=0}^{9} 2^{9-k}\cdot 2^k = 2^{10} + \sum_{k=0}^{9} 2^9 = 2^{10} + 10\cdot 2^9 = 1024+5120 = 6144$

№3

Заметим, что в описанном в условии графе все циклы ~~перест~~ не пересекаются друг с другом, т.к. для каждой вершины входящая и исходящая степени равны 1 (следует из определения перестановки), а для пересечения циклов нужно, чтобы у некоторой вершины сумма входящей и исходящей степени была ≥ 3.

Заметим, что существует следующая биекция между множеством возможных циклов и числами $\{1,\dots,2^{n}-1\} = \{1_2, \dots, \underbrace{11\dots1}_{n}{}_2\}$: если в цикле элемент i есть, то в числе из $\{1,\dots,2^{n}-1\}$ i-й двоичный разряд равен 1 (разряды нумеруем с 1). Но ~~поскольку для заданной перестановки циклы не пересекаются, то объединение множеств~~

Но на самом деле, $S(X) = \sum_{x\in X} 2^x$ — почти та же самая биекция, только $S(X)$ в два раза больше соотв. элемента для X из $\{1,\dots,2^n-1\}$, т.е. $S(X)$ — некоторое двоичное число (разряды нумеруем с 0), в котором на i-м разряде стоит 1 тогда, когда $i\in X$

Но тогда $g(P) = xor_{x\in C(P)} S(x) = 2^{n+1}-2 = \underbrace{1\dots1}_{n}0_2$, т.к. любые два цикла не пересекаются $\Rightarrow$ у значений S от этих циклов нет совпадающих единиц, а еще в каждом разряде (кроме 0) в некотором $S(x)$ стоит 1 (т.к. любая вершина есть в каком-то цикле)

+ 25б

$g(P)=2^{n+1}-2$, A — мн-во перестановок от 1 до n

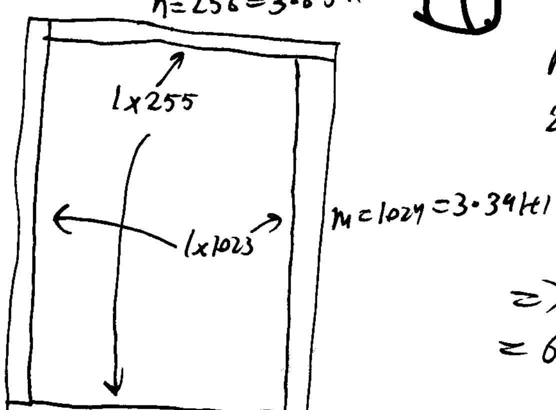
$\Rightarrow xor_{P\in A}\, g(P) = xor_{P\in A}\, 2^{n+1}-2=0$, т.к. все числа одинаковые $\Rightarrow$ все разряды всех чисел совпадают, ~~а |A| = n! : 2 (т.к. n ≥ 2, иначе всего 1 перестановка одного элемента и одно значение S, а для xor в g(P) нужно ≥ 2 аргумента)~~ $\Rightarrow xor_{P\in A}\, 2^{n+1}-2=0$

$\Rightarrow xor_{P\in A}\, g(P)=0$

N2

+ 3б

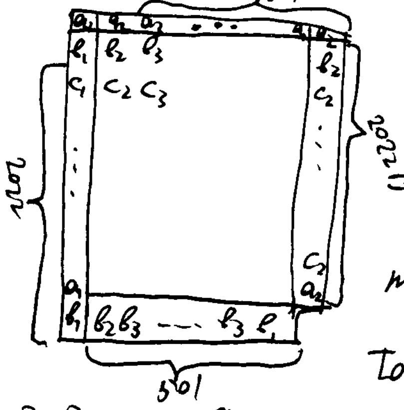
1) $n=256=3\cdot 85+1$



Всю рамку можно разбить на 4 прямоугольника: 2 — 1x255, 2 — 1x1023. В 1x255 = 1x(3·85) сумма равна 32·85 (он разбивается на 85 фигур 1x3), аналогично в 1x1023 сумма 32·341 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ общая сумма равна $2\cdot(32\cdot 85)+2(32\cdot 341)=$
$=64(341+85)=64\cdot 426=27264$

± 15б

2) $n=503=3\cdot 167+2$
$m=2024=3\cdot 674+2$



Пусть $a_{i,j}$ — число в строке i и столбце j, тогда $a_{i,j}=a_{i+3,j}$ (т.к. $a_{i,j}+a_{i+1,j}+a_{i+2,j}=32=a_{i+1,j}+a_{i+2,j}+a_{i+3,j}$), аналогично $a_{i,j}=a_{i,j+3}$

$\Rightarrow a_{i,j}=a_{i+3k,j}$ и $a_{i,j}=a_{i,j+3k}$ $\Rightarrow a_{i,j}=a_{i+3k,j+3m}$ для $i, j, k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$ таких, что $a_{i,j}$ и $a_{i+3k,j+3m}$ существуют.

Тогда на самом деле, все числа можно определить через один квадратик 3x3, т.к. $a_{i,j}=a_{(i \bmod 3),(j \bmod 3)}$, и $0\le i \bmod 3,\ j \bmod 3\le 2$. Тогда пусть напротив вырезанного угла стоят числа как на картинке, тогда $503\equiv_3 2$, $2024\equiv_3 2$ $\Rightarrow$ в двух других углах стоят a_2, b_1, а $511\equiv_3 1$, $2023\equiv_3 1$ $\Rightarrow$ у вырезанной клетки стоят b_1, a_2.

Тогда весь периметр кроме уголка $\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & \end{matrix}$ разбивается на 4 прямоугольника длины кратной 3 $\Rightarrow$ суммы в них равны $32\cdot 674$ (1x2022) и $32\cdot 167$ (1x501) соотв., и остается уголок, в котором однозначно сумму посчитать нельзя:

Бланк ответов

понятно, что эта сумма может принимать разные значения

~~Наприм~~ Например, $\boxed{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 30 \\ 1 & 30 & 1 \\ 30 & 1 & 1 \end{matrix}}$ либо $\boxed{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 2 & 2 & 28 \\ 2 & 28 & 2 \\ 28 & 2 & 2 \end{matrix}}$

$(a_1+a_2+b_1=3)$ $(a_1+a_2+b_1=6)$

(понятно, что по этим квадратам восстановится вся доска, и условие про сумму 32 выполнится).

Значит, для $n=503$, $m=2024$ однозначно ответить на вопрос задачи невозможно

N1

Заметим, что $a=b \Rightarrow (a,b)=a$, $a \operatorname{xor} b=0$, $a\geq 1>0 \Rightarrow (a,b)>a \operatorname{xor} b$

значит, для всех (a,b) таких, что $(a,b)<a \operatorname{xor} b$ верно $b>a$, т.к. $b\neq a$

$(a,b)=(a,b-a)\leq b-a$

Также верно $b \operatorname{xor} a \geq b-a$ $(b>a)$, т.к. пусть $b=2^{x_0}+\ldots+2^{x_k}$, $a=2^{y_0}+\ldots+2^{y_n}$,

$X=\{x_0,\ldots,x_k\}$, $Y=\{y_0,\ldots,y_n\}$, $P=X\cap Y \Rightarrow b-a=\sum\limits_{i\in X\setminus P}2^i-\sum\limits_{j\in Y\setminus P}2^j$, в то время

номера разрядов в с единицами то же самое для а

как $b \operatorname{xor} a=\sum\limits_{i\in X\setminus P}2^i+\sum\limits_{j\in Y\setminus P}2^j \Rightarrow b \operatorname{xor} a\geq b-a$, причем $b \operatorname{xor} a=b-a$

$\Leftrightarrow Y\setminus P=\varnothing$, т.е. $Y\subset X$

$b \operatorname{xor} a\geq b-a$, $b-a\geq (a,b-a)=(a,b) \Rightarrow b \operatorname{xor} a\geq (a,b)$, причем $b \operatorname{xor} a=(a,b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b \operatorname{xor} a=b-a=(a,b-a)=(a,b)$

$\Downarrow$

Все разряды (ненулевые) двоичной записи в а ненулевые и в b

$\Rightarrow b \vdots b-a$, $a \vdots b-a$