ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101273879192

Титульный лист

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 ☐ 11

Фамилия ИЛЛАРИОНОВ

Имя АРТЁМ

Отчество ВЛАДИСЛАВОВИЧ

Дата рождения 27 08 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория ГУК401

Телефон +79024400953

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101273879192

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс
- [ ] 8
- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 00   Количество черновиков к проверке 02

Время выхода с   :   до   :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	03	00	25						
Балл члена жюри №2	00	03	00	25						

Итоговый балл 028

Подпись члена жюри №1   **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 4.

подпункт 1) ~~$F(7,7) = \sum_{i=1}^{7} gcd($~~ $F(7,7) = gcd(1;8) + gcd(2;9) + gcd(3;10) + gcd(4;11) + gcd(5;12) + gcd(6;13) + gcd(7;14) = 1+1+1+1+1+1+7 = 13$

Ответ: 13

+1 б

подпункт 2) Искать $F(1024, 1024)$ будем начиная с конца, т.е с $i=1024$

Т.к. $1024 = 2^{10}$ ⇒ НОД не равен единице, если число чётное и конкретно нод (a, b) равен ~~...~~ 2^q, где q → минимальное количество двоек, присутствующих в разложении a и b (где двоек меньше, тому и равен НОД).

~~Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти сумму чисел до 1024 нечетных (НОД равен 1), ... :2 (нод равен 2) и т.д.~~

Чтобы избежать повторений во время поиска суммы ~~...~~ нодов чисел, начнем с 2^{10}. НОД$(1024; 2048) = 1024$ → только ~~в этом случае~~ одно число.

Далее нужно найти кол-во чисел, максимальный нод которого с данным равен 2^9. Т.к. ~~...~~ р-ат ф-ии у нас равен $gcd(i; i+1024)$ ~~...~~ и мы перебираем числа, ~~...~~ в делителях которых присутствует 2^9, 2^8 и т.д ⇒ $i+1024$ тоже будет на него делится. ($1024 = 2^{10} = 2^9 \cdot 2 = 4 \cdot 2^8$ и т.д) ~~...~~, а мы знаем, что НОД $(2^n; 2^n + X \cdot 2^n)$ равен 2^n (X → нек-ый коэфф, при умножении на который 2^n получится 1024). Распишем подходящие числа:

+2 б

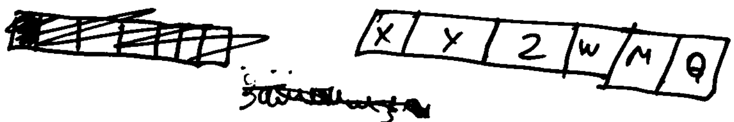
1) $\underset{\text{на } 2^{10}}{1024}$; 2) $\overset{\text{на } 2^9}{512}$; 1024 ; 3) 256; 512; 768; 1024 ....

Каждый раз мы выписываем в 2 раза больше чисел, но чтобы не взять ~~...~~ ~~без~~ повторяющиеся числа мы будем каждый раз вычеркивать половину из них (т.к. ровно половина имеют НОД больше и он посчитан). Итого получим: ~~8~~ $F(1024, 1024) = 1024 + 512 + 2 \cdot \overset{256}{\cancel{512}} + 4 \cdot 128 + 8 \cdot 64 + \cancel{...}\ 16 \cdot 32 + 32 \cdot 16 + 64 \cdot 8 + 128 \cdot 4 + 256 \cdot 2 + \underbrace{512 \cdot 1}_{\text{нечётные}} = 1024 + 512 \cdot 10 = 1024 + 5120 = 6144$

Ответ: $F(7,7) = 6144$

Задание 2.

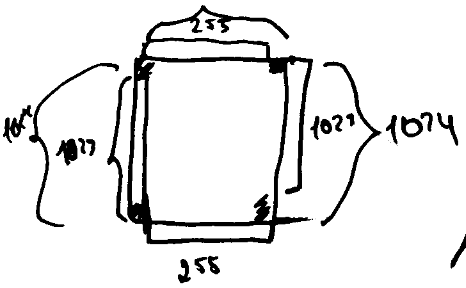
Т.к. в каждой полоске сумма цифр равна 32, нетрудно понять, что числа в строке чередуются по 3 штуки:



$$\begin{cases} X+Y+Z=Y+Z+W \Rightarrow X=W \\ Y+Z+W=Z+W+M \Rightarrow Y=M \\ Z+W+M=W+M+Q \Rightarrow Z=Q \end{cases}$$
и т.д.!

подпункт 1:

Т.к. числа чередуются по 3 и мы можем взять неск. идущих подряд троек и просто сложить их суммы. Для картины, где $n=256$, а $m=1024$, можно придумать следущее разбиение:



Итого, по рисунку, мы смогли разбить картину на 2 полоски по 255 цифр и 2 полоски по 1023 цифры.

Найдём сумму: $2\cdot\frac{32\cdot255}{3}+2\cdot\frac{32\cdot1023}{3}=$

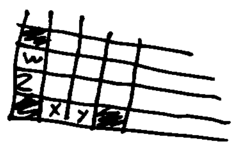
$=2\cdot(2720+10912)=2\cdot13632=27264$ Ответ: 27264

+3 б

подпункт 2.

Заметим, что для уголка:

$(w+z)=(x+y)$!



Т.к. Примерный квадрат (см. черновик) выглядит так. видно, что 503 образует строку троек, а в столбцах сбоку получается остаток 2. Составив систему ур-ий, посчитаем сумму

Бланк ответов

Задание 1 (см. черновик). 1

…ие 1.

1 xor 1 → $\frac{1}{1}$ ⇒ 0

(1;1) < 1 xor 1

(1;1) = 1 < 0 ⇒ неверно.

~~(101;1)~~

(5;1) → 1

$\begin{array}{r} 111 \\ 001 \\ \hline 110 \end{array}$

(2048;2048) → gcd = (2048)

для 5! (5;5) → gcd = 5

5 xor 5 = 0

5;4 → 1

⇒ 101 / 100 → 1

5;3 → 4

xor $\begin{array}{r} 101 \\ 011 \\ \hline 110 \end{array}$ → 6

xor $\begin{array}{r} 101 \\ 010 \\ \hline 111 \end{array}$ → 7   (5;2) = 1

xor $\begin{array}{r} 101 \\ 001 \\ \hline 100 \end{array}$ ⇒ 4   (5;1) = 1

1) если числа не являются делителями друг друга ⇒ gcd (a,b) = 1 и если отличие ⇒ 1 ⇒ условие выполнилось!

2) если делители друг друга: gcd (12;6) = 6

xor 1100 / xor 0110

24 xor 48

Заключается минимум в 2 раза и xor всё равно больше!

⇒ ответ: $\sum_{i=1}^{2048}$ ~~(2024·2)~~ 4048 — сумму посчитаем как сумма арифм. прогрессии:

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{(1+2024)}{2} \cdot \cancel{2024}$ 1028

2025000 + 56700 − 4048

140

111 → 4+2+1 = 7

101 → 010 = 2

1 → 2
2 → 4
3 → 8
4 → 16
5 → 32
6 → 64
7 → 128
8 → 256
9 → 512
10 → 1024
11 → 2048

~~2048~~ | 0
~~1024~~ | 0

xor $\begin{array}{r} 1000000 \\ 1000000 \\ \hline 0 \end{array}$

2048 xor 1024

$\begin{array}{r} 10000 \\ 01000 \\ \hline 11000 \end{array}$ → много больше

1 ...
1 ... ⇒ xor > gcd!

если не имеют общ. делителей:

11 и 4

$\underset{8+0+2+1}{\overset{3\,2\,1\,0}{1011}}$ xor 0100 = 1111

для чисел с разностью 1 и равных ⇒ gcd == xor

если больше ⇒

11 и 10

$\begin{array}{r} 1011 \\ 1010 \\ \hline 1 \end{array}$

11 и 9

xor $\begin{array}{r} 1011 \\ 1001 \\ \hline 0010 \end{array}$ → 2

12 и 9 → gcd (12;9) = 3

xor $\begin{array}{r} 1100 \\ 1001 \\ \hline 101 \end{array}$ → больше, чем gcd!

3: 11 ; 6: 110 ; 9: 1001 ; 12: 1100 ;

15: 1111   18: 10010

2025 · 1028 = 2025 · (1000 + 28)

$\begin{array}{r} 2025 \\ \times\ 1028 \\ \hline 16200 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2025 \\ +\ 2025 \\ \hline 4050 \\ +\ 2025 \\ \hline 60750 \\ -\ 4050 \\ \hline 56700 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2025 \\ \times\ 28 \\ \hline 16200 \\ 4050 \\ \hline 56700 \end{array}$

4

80 →

(a, b)

xor с ~~собой~~ равен 0

xor (a, b-1) равен

80	0
40	0
20	0
10	0
5	1
2	0
1	1

6 5 4 3 2 1 0

1010000 = $2^4 + 2^5 + 2^6$

16 + ~~32~~ + 64 = 80

80

79 | 1

84 и 83

6 5 4 3 2 1 0

1010100

1010011

11 → gcd!

6 5 4 3 2 1 0

1001111 = 64 + 8 + 4 + 2 + 1 =

разница в 1 и работает! = 19

1010001

1010000

1

xor = 1

gcd = 1

⇒ не вып, если xor сам с собой!

⇒ если a ~~чётно~~ не двум ~~[illegible]~~ и b ~~[illegible]~~ чётно →

(разница в единицу!)

82 в 81

1010010

1010001

11 → gcd (82, 81)

0110

1010

1010011

1010010

1

40 и 10

6 5 4 3 2 1 0

1010000

~~[illegible]~~

101000

40	0
20	0
10	0
5	1
2	0
1	1

числа, дают на 2 имена

разницу в 1 ~~[illegible]~~ единицу в двоичн. записи

(сдвиг ~~вправо~~) влево) → равно минимум

ближайшей степени двойки снизу

(для 80 → 64 (2^6)

80 → 64

gcd

1100

1001

101 = 3

→ 3

100000 → 2^5

010000 → 2^4

110000 → 2^5 ...

12 и 10

~~1100~~

~~1010~~

1 ...

для 1 → 2023 числа

для 2 →

~~1 всегда~~ для 2 → все до

~~10~~

10

01

10

11

~~2 + 1 раз~~

110

xor 110

0

10

01 = 11

11

10 → 1 → не подх.

~~100~~ не раб: для числа самим с собой!

если разница в 1 → не раб для чётных

~~100~~ для

2 1 0

110 = 6

101 = 5

~~1010~~

~~101~~

~~100~~

1 2 3 4 5 6

→ сумму можно найти как 0 + 1 + 2 + 3 + 3 +

110

101 100

100 010

1

~~100~~

11

1

1

0 = gcd = 1

6 и 4 не раб.

1110

1100

10 2

10000 → 20 ?

10000 → 16

4 3 2 1 0

100

10000

1100

16

12

1111

1100

11 ?

3 и gcd = 3!

2

1 → 1

2

10

01

10

…ание 2 (подп. 2)

1 2 3 1 2 3

4
5
1
4
5
1
4

x
8
3
x
8
3
x

5 7 8 5 7 8 5 7 8

8 4

$$\begin{cases} 3+x = 5+7 \\ 4+5 = 2+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+2 = 8+3 \\ 1+4 = 7+8 \end{cases}$$

6

$2-4 = 3-7$

одни из них удалей

7