



1302294428467

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ШЕВЧЕНКО

Имя АРСЕНИЙ

Отчество АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 18 09 2007

Город участия ЧФА

Аудитория 501

Телефон 89874013533

Дата 03 02 2025

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



1302294428467

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия У Ф А

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 Количество черновиков к проверке 0
Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	—	0	20	—					
Балл члена жюри №2	20	—	0	20	—					

Итоговый балл 40

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1 Пусть исходное число $100a + 10b + c$

Рассмотрим первое условие: $a + b + c = 10z + r$, $z \in \mathbb{Z}$, $r = c$ - по условию (остаток от деления на 10 обозначим за r), все ~~цифры~~ ^{а, б, с} ~~из~~ ^{каждых} из них ≤ 9 , Значит

$a + b + c \leq 27$, поэтому можно говорить о том, что $a + b + c = 10z + r$, $r = c$ Тогда $a + b + c = 10z + r$ То есть

получили, что $a + b$ кратно 10 Но ведь $a + b \leq 18$ ($a \leq 9, b \leq 9$) и $a + b$ очевидно $\neq 0$, значит единственный случай - тот, когда $a + b = 10$ Теперь рассмотрим

второе. $\underbrace{ab}_{< 100} + \underbrace{bc}_{< 100} + \underbrace{ca}_{< 100} < 300$, $ab + bc + ca = 100m + 10n + q$
 $q = b$ - по условию

3 условие: $\underbrace{abc}_{\leq 9^3 = 729} = 100f + 10g + L$

Тогда $ab + bc + ca = 100m + 10n + q$

$b(a + c - 1) + ca$ кратно 10

$L = a$ - по условию

Значит $a(bc - 1) = 100f + 10g$ - тоже кратно 10

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = 10 \quad (1) \\ a(bc - 1) \cdot 10 \quad (2) \\ b(a - 1) \cdot 10 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$a(bc - 1) \cdot 10 \quad (2)$$

$$b(a - 1) \cdot 10 \quad (3)$$

$$(1) \quad a = 10 - b$$

$$\text{подставим в (3)} \quad b(10 - b - 1) = 10k, k \in \mathbb{Z}$$

$$b(9 - b) = 10k, \quad b^2 - 9b + 10k = 0$$

$$b = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 40k}}{2}$$

Отсюда

$$k = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b' = \frac{9 \pm 9}{2} = 9 \\ b = \frac{9 - 9}{2} = 0, \text{ не подх, } b \geq 0 \end{array} \right.$$

т.к. $b \in \mathbb{Z}$ и $b \geq 0$, то

$$k = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{9 \pm 7}{2} = 5 \\ b = \frac{9 - 7}{2} = 1 \end{array} \right. \quad \checkmark \quad 1$$

$$b=9 \Rightarrow a=1$$

$$b=5 \Rightarrow a=5 \quad \checkmark$$

$$b=4 \Rightarrow a=6$$

наибольшие
все числа удовлетворяют
условия

Ответ 199,
551, 553,
555, 557,
559, 644, 649

Погодадим $b(2) \equiv 1$

$$1(9c-1) \cdot 10, c=0, c=1, c=2, c=3 \text{ и } c=8 -$$

не подходят, а вот
 $c=9$ - подходит

199

$$5c-1 \div 2$$

$$6(4c-1) \div 10$$

$c=1$ - не подх

$c=2$ - не подх

$c=3$ - не подх

$c=4$ - подходит (6153010)

$c=5$ - не подх

$c=6$ - не подх

$c=7$ - не подх

$c=8$ - не подх

$c=9$ - подходит

$$(356 = 567) \cdot 10$$

644
649

$$c=1$$

$$c=3$$

$$c=5$$

$$c=7$$

$$c=9$$

$$551$$

$$553$$

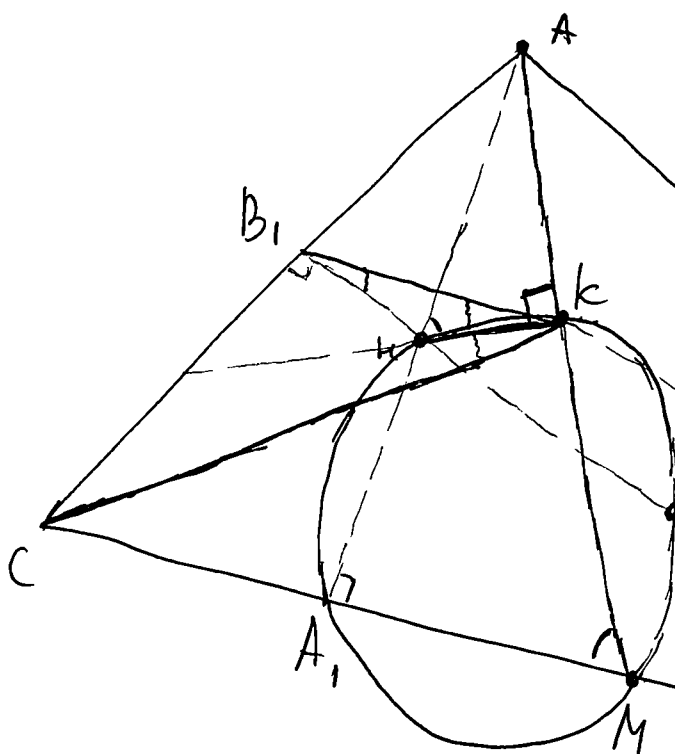
$$555$$

$$557$$

$$559$$

+

№3



1) Вокруг четырехугольника

KMA, M описана окружность

$\Rightarrow$ сумма противоположных
углов равна 180°

$$\angle KMA + \angle KKM = 180^\circ$$

$$90^\circ, \text{ так как } AA_1 \perp CB$$

$$\Rightarrow \angle KKM = 90^\circ$$

т.е. $KK \perp AM$

неверно

2) Т.к. тогда это центр окружности, выискиваем

$\angle HKB_1 = \angle HKB$, K - т.к. $\triangle HKB_1 K$ - ρ/θ
 KB_1 и KB - радиусы окружности
 Нужно доказать равенство углов
 $B_1 K H$ и HKB

~~нч~~

нч

$$2^{xy} \cdot z = 2^{x+y} (x+y+z) \quad | : 2^{xy}$$

~~$$z = 2^{x+y-xy} (x+y+z)$$~~

~~$$z (2^{xy} - 2^{x+y}) = 2^{x+y} (x+y)$$~~

$$z = \frac{2^{x+y} (x+y)}{2^{xy} - 2^{x+y}} = \frac{x+y}{2^{xy-x-y} - 1} \quad (\text{разделили на } 2^{\frac{x+y}{2}})$$

так $z \in \mathbb{N}$, то $2^{xy-x-y} - 1$ является делителем $x+y$ тогда ~~$x = \frac{x+y}{2^{xy-x-y} - 1}$~~

$$z = \frac{x+y}{2^{xy-x-y} - 1}$$

$$\geq 1, \in \mathbb{N}$$

$$f(t) = 2^t$$

$$f'(t) = 2^t \ln 2$$

$f'(t) > 0 \Rightarrow$ функция возрастающая

Зафиксируем переменную x .

Тогда ~~$z = \frac{x+y}{2^{xy-x-y} - 1}$~~

$$xy - x - y = x - 1 - x + y(x-1)$$

Значит при увеличении y будет расти 2^{xy-x-y}

$$xy - x - y = (x-1)(y-1) - 1$$

$$z = \frac{x+y}{\frac{2^{(x-1)(y-1)} - 1}{2}} = \frac{2(x+y)}{2^{(x-1)(y-1)} - 2} \quad (*)$$

~~Пусть~~

~~$$z = \frac{x+y}{2^{xy-x-y} - 1}$$~~

~~$$x=2 \Rightarrow y=3$$~~

~~$$y=2 \Rightarrow x=3$$~~

~~$$x=3 \Rightarrow y=4$$~~

~~$$y=3 \Rightarrow x=4$$~~

Если есть решение (x, y, z) , то будет решение (y, x, z)

~~при $x=2$ найдем топ номера, когда~~

~~$$2^{xy-x-y} - 1 > x+y$$~~

~~$$2(2+y) < 2^{(y-1)} - 2$$~~

~~$$6+2y < 2^{y-1}$$~~

~~$$\frac{2(2+y)}{2^{(y-1)} - 2}$$~~

Далее рассмотрим

$x=2$ (зафиксируем x и посмотрим все y)

продолжение №4

(*) подставляем $x=2$, $z = \frac{2(2+y)}{2^{(2-1)(y-1)} - 2} =$

$$= \frac{2(2+y)}{2^{y-1} - 2}$$

Найдем значение выражения при $y = 2, 3, 4, 5 \dots$

$y=3$

$$z = \frac{2 \cdot 5}{2^2 - 2} = 5 \quad (\checkmark)$$

$y=2$ — не определен — не имеет смысла, ведь знаменатель обращается в 0.

$y=4$, $z = \frac{2 \cdot 6}{2^3 - 2} = 2 \quad (\checkmark)$

$y=5$, $z = \frac{2 \cdot 7}{2^4 - 2} = 1 \quad (\checkmark)$

$y=6$, $z = \frac{2 \cdot 8}{2^5 - 2} < 1$

$y=7$, $z = \frac{2 \cdot 9}{2^6 - 2} < 1$

видно, 2^{y-1} растёт гораздо быстрее, чем $2(2+y)$
 дальнейшие y при $x=2$ не подходят

Тогда $x=2, y=3, z=5$

$x=2, y=4, z=2$

$x=2, y=5, z=1$

~~$y=2, z$~~ $x=3, y=2, z=5$

$x=4, y=2, z=2$

$x=5, y=2, z=1$

Пусть $x=6$ тогда $z = \frac{2(6+y)}{2^{5(y-1)} - 2} = \frac{2(6+y)}{32^{y-1} - 2}$

32^{y-1} растёт гораздо быстрее, чем $2(6+y)$

Поэтому рассмотрим всевозможные y

$y=2$ — не подх, $z < 1$ $y=3$ — не подх, $z < 1$

$y=1$ — не подх, $z < 0$

дальше нет смысла рассм. так 32^{y-1} растёт гораздо быстрее

Пусть $x=3, y>2$. Тогда $z = \frac{2(3+y)}{2^{y-1}-2}$
 $= \frac{2(3+y)}{4^{y-1}-2}$ при $y=3$

$$z = \frac{2 \cdot 6}{4^2 - 2} < 1$$

при $y=4$ $z = \frac{2 \cdot 7}{4^3 - 2} < 1$

--- Т.е. при $y>3$ такие решения не будут в силу того, что $4^{y-1}-2$ растёт быстрее, чем $2(3+y)$.

Пусть $x=4, y>2$ Тогда $z = \frac{2(4+y)}{2^{y-1}-2} =$
 $= \frac{2(4+y)}{8^{y-1}-2}$ $y=3$ $z = \frac{2 \cdot 7}{8^2 - 2} < 1$

$$y=4 \quad z = \frac{2 \cdot 8}{8^3 - 2} < 1$$

Опять же, $8^{y-1}-2$ растёт гораздо быстрее, чем $4+y$
 Аналогично со всеми другими $x>2$

Мы доказали (не слишком строго, но с помощью производной или построением ~~эскиза~~ графиков функций можно доказать строже), что взял любой $x>2$ (и зафиксировав его) и без потери $y>2$ мы не найдём решений. Аналогично работает, если мы зафиксируем любой $y>2$ и возьмём любой $x>2$ ~~симметрично от-но~~ (* симметрично от-но x, y если $x \neq y, y \neq x$ то результат никак не изменится)

Тогда Ответ: $(2, 3, 5), (2, 4, 2), (2, 5, 1),$
 $(3, 2, 5), (4, 2, 2), (5, 2, 1)$