



3101722504361

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия С А Л А Х О В

Имя М А Т В Е Й

Отчество А Л Е К С А Н Д Р О В И Ч

Дата рождения 1 1 0 1 2 0 0 9

Город участия У Ф А

Аудитория 6 0 5

Телефон + 7 9 1 7 3 5 6 0 4 6 0

Дата 0 3 0 2 2 0 2 5

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



3101722504361

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия У Ф А

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	5	20	0					
Балл члена жюри №2	20	20	5	20	0					

Итоговый балл 65

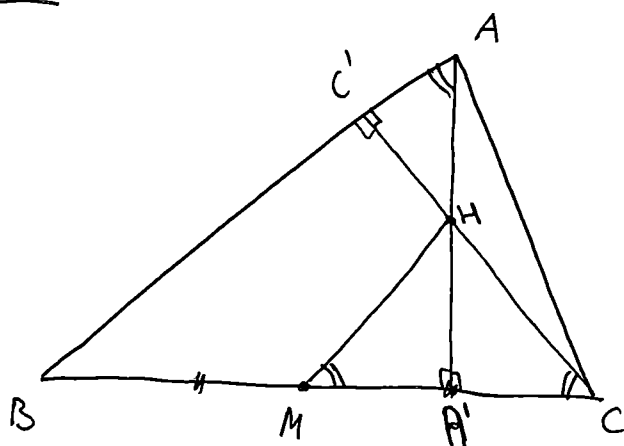
Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1



Дано: $\triangle ABC$ - острогольный
 M - середина BC
 H - ортоцентр
 $ANMB$ - вписанный

Найти $BA' : A'C$

Решение Пусть $AN \cap BC = A'$

Т.к. $ANMB$ - вписанный, то $\angle BAN + \angle BMN = 180^\circ \Rightarrow \angle BAN = \angle CMN$

Также, $\angle A'CN = 90^\circ - \angle CNA' = 90^\circ - \angle C'HA = \angle BAN = \angle CMN \Rightarrow \triangle CMN$ - равнобедренный $\checkmark$
 (верт)

Тогда высота HA' в $\triangle MNC$ является медианой, $\Rightarrow MA' = A'C = x$, тогда $BM = MC = 2x$

Тогда $BA' : A'C = (2x + x) : x = 3 : 1$

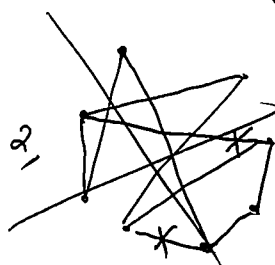
+

Ответ 3 1

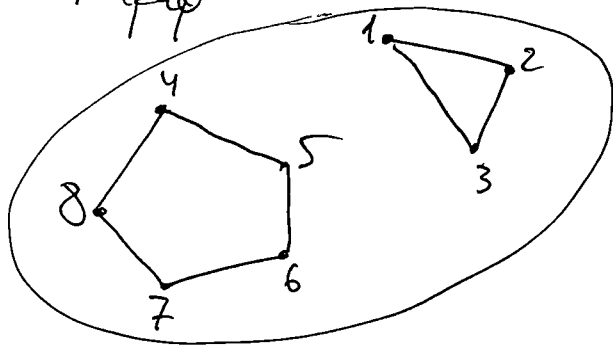
№2

Заметим, что каждый шахматист может сыграть максимум 7 игр (с 7 разными противниками). Тогда после 5 проведённых туров у каждого шахматиста останется ровно 2 соперника, с которыми он не играл. Построим граф на 8 вершинах, где каждая вершина соответствует одному шахматисту, и ребро между ребрами означает то, что шахматист ещё не играл между собой.

Заметим, что степень каждой вершины 2, а значит, в графе есть Эйлера цикл.



Заметим, что не гарантируется, что такой граф будет связным.
 Докажем, что мы можем получить такой граф



Действительно, в каждом из компонент связности четное число вершин, т.е. в каждом один шрифт останется без шрифта.
 Чтобы доказать, что такая ситуация может произойти, достаточно привести пример случайной перестановки.

1) 14 2) 15 3) 16 4) 17 5) 18
 28 24 27 25 26
 36 37 34 38 35
 57 68 58 46 47

В результате получается граф, указанный выше. Тогда,
ответ: да, может

+

№4

Пусть $d=x$, $c=x-y$, $b=x-2y$, $a=x-3y$ - придем к выражению ($a>0, \Rightarrow x-3y>0, \Rightarrow x>3y$
 $x>0, y>0$)

Тогда $a^2+d^2=b^2+c^2$, $(a+d)^2-2ad=\cancel{b^2+c^2}$, $(x-3y+x)^2-2x(x-3y)=(x-2y+x-y)((x-2y)^2-(x-y)(x-y)+(x-y)^2)$
 $= (b+c)(b^2-bc+c^2)$

$(2x-3y)^2-2x(x-3y)=(2x-3y)(x^2-4xy+4y^2-x^2+2xy+xy-2y^2+x^2-2xy+y^2)=(2x-3y)(x^2-3xy+3y^2)$

Тогда перенесем влево и введем $(2x-3y)(2x-3y-x^2+3xy-3y^2)=2x(x-3y)=2ad>0, \Rightarrow$
 $=b+c>0, \Rightarrow 2x-3y-x^2+3xy-3y^2>0 \quad (+1) \checkmark$

$x^2-x(3y+2)(3y^2+3y)<0$ - относительно x парабола с ветвями вверх,
 $x_1=\frac{3y+2}{2}=1,5y+1$ Пусть $x \geq 3$ Тогда, т.к.

$x>3y$, то $y<\frac{x}{3}$ Тогда $x_1<1,5 \cdot \frac{x}{3}+1=0,5x+1 \checkmark$

подставлен минимум

, т.е. $x_6 < \frac{1}{2}x + 1$. Так как $x \geq 3$, то $x > x_6$, т.к. $x_6 < \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 = 2,5$. Тогда при $x \geq 3$,

$f(x) = x^2 - x(3y+2) + 3y^2 + 3y$ возрастает. Докажем, что при $x=3$, $f(x) \leq 0$

$f(3) = 9 - 9y - 6 + 3y^2 + 3y = 3y^2 - 6y + 3 = 3(y^2 - 2y + 1) = 3(y-1)^2 \geq 0$. Заметим,

что при $x > 3$, $f(x) > f(3)$, следовательно, $x \neq 3, \Rightarrow x < 3, \Rightarrow x \leq 2$. Т.е. мы доказали, что $f(x)$ при $x \geq 3$ возрастает.

+

№3

Заметим, что ферзь движется только по прямой или диагонали

По прямой максимальное расстояние между центрами клеток на доске 8×8 равно 7;

по диагонали - $\sqrt{2} \cdot 7 = 7\sqrt{2}$. Тогда Андрей мог сделать максимум 14 ходов

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$. При этом в сумме закрашивая

$\frac{(1+7) \cdot 7}{2} + \frac{(1+7) \cdot 7}{2} + 1$ (начальная) = 57 клеток. Также заметим, что $7\sqrt{2}$ можно поместить

только на главной диагонали, но не на поле, поделенном на 2 части, в каждой из которых

всего 57 клеток. Значит, не существует хода.

Также заметим, что на шахматной доске 32 белые и 32 черные клетки, при

движении по диагонали ферзь движется по одному цвету клеток. Если

возможно переместить 57 клеток, то число из цветов клеток точно будет $\left(\frac{57}{2}\right) + 1 =$

29. Значит, $29 > \frac{(1+7) \cdot 7}{2}$, т.е. существуют ходы по диагонали разных

цветов, что не противоречит условию.

+

Ответ, 57 клеток

№5

Пусть на планете год длится N дней. Тогда для того, чтобы разделить год на месяцы, как сказано в условии, ~~то~~ N можно представить как $N = 28 + 30n + 31k$, где n — количество месяцев по 30 дней, k — количество месяцев по 31 день, причём т.к. среди любых трёх последовательных месяцев должен быть месяц с 31 днём, то k точно $\geq \frac{1+n+k}{3}$, т.е. $3k \geq 1+n+k$, $k \geq \frac{n+1}{2}$; $2k \geq n+1$; $n \leq 2k-1$.
Заметим, что 30 и 31 — взаимно простые числа $(N-28) = 30n + 31k$.
Если в задаче подразумевалось, что в году должно быть 12 месяцев (так же, как и в земном), то тогда $k = 12 - 1 - n = 11 - n$ подставим

$$(N-28) = 30n + 31(11-n) = 341 - n, N = 369 - n; n \leq 2k-1 \text{ и } n+k=1, \Rightarrow n \leq 4, \Rightarrow \text{при любом } N, > 369, \text{ это невозможно}$$

Если в задаче такая не подразумевалась, то $(N-28) = 30n + 31k$,

$$(N-28) \leq 30(2k-1) + 31k = 91k - 30 \quad n \leq 2k-1, \text{ т.е.}$$

~~$N \leq 91k - 2$ Заметим, что k точно не превышает $\frac{N-28}{31}$, $\Rightarrow N \leq \frac{91}{31}(N-28) - 2$~~ Заметим, что k точно не превышает $\frac{N-28}{31}$, $\Rightarrow N \leq \frac{91}{31}(N-28) - 2$ ← не записывайте, считать не нужно!

$$k \geq \frac{n+1}{2}, \text{ т.е. } (N-28) \geq 30n + 31\left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ Заметим, что } n \text{ точно не превышает}$$

$$\frac{2}{3} \frac{N-28}{30} \quad (N-28) \geq \frac{2}{3} \frac{N-28}{30} + 31\left(\frac{n+1}{2}\right) \geq \frac{1}{3}(N-28) \geq 31 \frac{n+1}{2};$$

$$2N - 56 \geq 93n + 31, N \geq \frac{93n + 87}{2}$$

