ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302568418728

Титульный лист

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия АЛЕКСАНДРОВА

Имя СОФЬЯ

Отчество ВЯЧЕСЛАВОВНА

Дата рождения 17 04 2007

Город участия УФА

Аудитория 501

Телефон +79170406163

Дата 03 02 2025 **Подпись**

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302568418728

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Город участия УФА

Заполняется организаторами

Количество доп листов 0 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	—	—	0					
Балл члена жюри №2	20	20	—	—	0					

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 1

Последнюю цифру числа можно определить, сравнивая это число по модулю с 10. Тогда:

1) $a+b+c \underset{10}{\equiv} c$

$a+b \underset{10}{\equiv} 0 \iff \begin{cases} a+b \le 18 \text{ (т.к. } a \text{ и } b \text{ — цифры, то max } a+b=18) \\ \left[\begin{array}{l} a+b=0 \text{ — невозможно} \\ a+b=10 \end{array} \right. \end{cases}$

$\Rightarrow a+b=10$

2) $ab+bc+ca \underset{10}{\equiv} b$

$ab+\underbrace{c(a+b)}_{10}-b \underset{10}{\equiv} 0$ т.к. $a+b=10$, то $c(a+b) \underset{10}{\equiv} 0 \Rightarrow$ можно убрать

$\cancel{b(a-b) \underset{10}{\equiv} 0}$ $b(a-1) \underset{10}{\equiv} 0 \iff$

(продолжение совокупности)

$\iff \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} b=4 \\ a-1=5 \end{cases} & a+b=4+6=10 \text{ уд} \\ \begin{cases} b=5 \\ a-1=4 \end{cases} & a+b=5+5=10 \text{ уд} \\ \begin{cases} b=6 \\ a-1=5 \end{cases} & a+b=12 \text{ — не уд} \\ \begin{cases} b=5 \\ a-1=6 \end{cases} & a+b=12 \text{ — не уд} \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} b=2 \\ a-1=5 \end{cases} & b+a=2+6=8 \ne 10 \text{ — не уд} \\ \begin{cases} b=5 \\ a-1=2 \end{cases} & b+a=5+3=8 \ne 10 \text{ — не уд} \\ \begin{cases} b=1 \\ a-1=10 \end{cases} & a=11>10 \text{ (} a<10 \text{ т.к. это цифра) — не уд} \\ \begin{cases} a-1=1 \\ b=10 \end{cases} & b=10 \ge 9 \text{ (} b<10 \text{, т.к. это цифра) — не уд} \\ \begin{cases} b=0 \\ a-1 \text{ любое} \end{cases} & 0+a=10 \Rightarrow a=10 \text{ (} a<10 \text{, т.к. это цифр) — не уд} \\ \begin{cases} b \text{ любое} \\ a-1=0 \end{cases} & b+1=10 \Rightarrow b=9 \text{ — уд} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \cancel{\begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases}}$ $a, b = \{1,9,\ 6,4,\ 5,5\}$ √

3) $\begin{cases} abc \underset{10}{\equiv} a \\ a=1 \\ b=9 \end{cases} \iff 9c \underset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow c=9$ (при $c \in [0, 8]$ другие остатки по mod 10)

$\Rightarrow \overline{abc} = 199$

~~Ответ 199~~ (продолжение на листе 2)

Задание 2

~~Шестой тур будет невозможным только в том случае, если все возможные пары исчерпаются.~~

~~Общее кол-во пар из 8 человек~~ ~~$C_8^2 = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$~~

Да, может. Пример

1 1-2, 3-4, 5-6, 7-8 (а-в - пара игроков а и в)

2 1-3, 2-4, 5-7, 6-8

3 1-4, 2-5, 3-8, 6-7

4 1-5, 2-8, 3-7, 4-6

5 1-6, 2-7, 4-8, 3-5

Построим дерево вариантов для 6 тура

1-7; 1-8 (1 может играть только с 7 и 8, т.к. с остальными уже играл)

1-7 → 2-3, 2-6; 1-8 → 2-3, 2-6 (2 может играть только с 3 и 6)

1-7, 2-3 → 4-5 и ~~6-8~~ (уже играли) (4 уже играл с 6 и 8, поэтому только с 5) ← невозможно составить пары для 6 тура

1-7, 2-6 → у 3 нет пары (уже играл с 4, 5, 8) ← невозможно составить пары для 6 тура

1-8, 2-3 → 4-5 → ~~6-7~~; 4-7 → ~~5-6~~ ← уже играли ← невозможно составить пары для 6 тура

1-8, 2-6 → 3-4, 3-5, 3-7 уже играли ⇒ у 3 нет пары ← невозможно составить пары для 6 тура

Таким образом, рассмотрев все возможные пары для 6 тура, мы убедились, что невозможно провести 6 тур при таких парах в первых пяти турах

+

Ответ да, может

Задание 1 (продолжение)

3) 2 $\begin{cases} \overline{abc} \underset{10}{\equiv} a \\ a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 24c \underset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow c = \left[\begin{array}{l} 4 \\ 9 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \overline{abc} = \left[\begin{array}{l} 644 \\ 649 \end{array}\right.$

3) 3 $\begin{cases} \overline{abc} \underset{10}{\equiv} a \\ a = 5 \\ b = 5 \end{cases} \quad 25c \underset{10}{\equiv} 5 \Rightarrow c = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \overline{abc} = \left[\begin{array}{l} 551 \\ 553 \\ 555 \\ 557 \\ 559 \end{array}\right.$

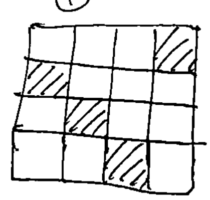
+

Ответ 199, 644, 649, 551, 553, 555, 557, 559

Задание 5

Докажем ММИ

1 База т.к. есть условие ~~для~~ для 4 квадратов $\Rightarrow n = 4$



– база верна

2 Пусть при $n = k$ выполняется

3 Докажем при $n = k + 1$

Задание 5 (продолжение)

1 случай никакие 3 квадрата на доске $k \times k$ не лежат на одной из главных диагоналей (*)

Тогда добавив квадрат в один из углов доски $(k+1)\times(k+1)$

МОГУТ БЫТЬ НА ДРУГИЕ КРИВЫЕ

все 3 условия выполняются (1 из (*) следует, что на ~~главной~~ одной из главных диагоналей будет не больше 3 квадратов $\Rightarrow$ центры никаких 4 не будут на одной прямой, 2 добавленный квадрат будет на отдельной строке и отдельном столбце, т.к. к доске $k \times k$ мы добавим ~~k~~ столбец и строку)

2 случай ~~если~~ 3 квадрата лежат на каждой из главных диагоналей

Тогда необходимо сдвинуть все ~~ква~~ выбранные квадраты на 1 строку вверх, а квадрат, который был выбран с 1 строки, разместить в другом месте на k строке ~~так, чтобы новый квадрат с (k+1) строки~~ Тогда мы сможем „освободить" главные диагонали и добавить $k+1$ квадрат в один из углов

$\Rightarrow$ Методом мат индукции мы доказали, что это возможно при $\forall n \in \mathbb{N}$

Линия отреза

Бланк ответов