



3101547450653

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия

РАЙЗИХ

Имя

КИРИЛЛА

Отчество

АНДРЕЕВНА

Дата рождения

13 03 2007

Город участия

ПЕРМЬ

Аудитория

115

Телефон

89824854605

Дата

03 02 2025

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



3101547450653

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 01 Количество черновиков к проверке
Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	—	—	—					
Балл члена жюри №2	20	20	—	0	—					

Итоговый балл

40

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Вариант 1

Задача 1 Рассмотрим первое условие, пусть ~~мы~~ ~~его можно~~ ~~при~~ Так все выражение симметрично от a, b и c то сначала рассмотрим вар, когда наше число $\overline{abc}$, а остальные вар по аналогии

• Если наше число $\overline{abc}$, то ~~в~~ первое уел $(a+b+c) \equiv c \pmod{10}$ или $a+b+c = 10k_1 + c, k_1 \in \mathbb{Z}$

$a+b = 10k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$, тк $0 \leq a \leq 9$ и $0 \leq b \leq 9$, то $a+b \leq 18 \Rightarrow$

$k_1 = 1$ или $k_1 = 0$ (тк ~~при~~ $k_1 = 2$ $a+b \leq 18 < 20$)

при $k_1 = 1$

$a+b=10$ + при $k=0$ $a=0$ и $b=0 \leftarrow$

a) $a=1$	$b=9$
б) $a=2$	$b=8$
в) $a=3$	$b=7$
г) $a=4$	$b=6$
д) $a=5$	$b=5$
е) $a=6$	$b=4$
ж) $a=7$	$b=3$
з) $a=8$	$b=2$
и) $a=9$	$b=1$

при $k=0$ $a=0=b$

~~авс~~ $0=abc \equiv a \pmod{10} \Rightarrow a=0 \Rightarrow$ число ~~000~~ $\leftarrow$
это не число

~~а) $a=1, b=9$~~

и 2) и 3)

$$ab+bc+ac = 10k_2 + b, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$abc = 10k_3 + a, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} a(bc-1) = 10k_3 \\ b(a+c-1) + ac = 10k_2 \end{cases}$$

т.е. $a(bc-1) \equiv 0 \pmod{10}$

при а) $a=2$ $2(8c-1) = 10k_3$ $(8c-1) = 5k_3$ ~~или~~ $\&$
 $b=8$ такое возможно при $c=2, c=4, c=7, c=9$,

$a=2$ $a+b+c = 12 \equiv c \pmod{10}$
а) $b=8$ $ab+bc+ac = 36 \not\equiv b \pmod{10} \leftarrow$ не подходит
 $c=2$

~~или~~ $a=2$ $a+b+c \equiv 14 \equiv c \pmod{10}$
 $b=8$ $ab+bc+ac = 46 \not\equiv 8 \pmod{10} \leftarrow$ не подходит
 $c=4$

$a=2$ $ab+bc+ac = 86 \not\equiv b \pmod{10} \leftarrow$ не подходит
 $b=8$
 $c=7$

Заметим, что условия абсолютно симметричны относительно a, b, c

из первого уга, если

~~из не~~

из первого уга, ~~если~~ число $\overline{abc}$

~~$a+b \div 10$~~ $a+b=10$

второе уга $c(a+b) + ab = 10k_2 + b$, или

$ab = 10k_2 - 10 + b, k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \textcircled{b(a-1) \mid 10}$

~~$a(b-1) \div 10$~~ a и b - одной четности,

т.е. ~~$b(a-1)$~~ произведение четного и нечетного

При ~~a~~ нечетном a и четном $(b-1)$

~~$a \equiv 5$~~

При четном a

~~$(b-1) \equiv 5$~~

~~$a+b=10$~~

~~$a(b-1) \equiv 10k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$~~

При четных	$a=0, 2, 4, 6, 8$	подходит только пары, где
$b=6$	или $b=4$	только $(a=4, b=6)$ $a=8, b=4$
При нечетных	$a=1$	нечетных четных $b=0, 2, 4, 6, 8$ $b=1, 3, 5, 7, 9$
Подходит только пары, где	$a \neq 5$, т.е. $a=0$ или $a=5$	
или любые пары, где	$b=1$ $(b=10)$	

так $a+b=10 \Rightarrow a$ и b - одной четности $\Rightarrow$

a и $(b-1)$ разных четностей

тогда либо $a \equiv 5$ и $(b-1) \equiv 2$, либо $a \equiv 2$ и $(b-1) \equiv 5$

При $a \equiv 5$ $a=0$ или $a=5$ при $a=0$ $abc=0 \equiv 0 \pmod{10}$

$\Rightarrow c=0$ - не подходит при $a=5$ $b=10-a=5 \Rightarrow$

$abc=25c$ или далее

При $(b-1) \equiv 5$ либо $b=1$ и $a=9$ либо $b=6$ и $a=4$,

или далее

Бланк ответов

Осталось разобраться с c

1) При $a = 4$ и $b = 6$

$$abc = 24c \equiv c \pmod{10} \quad \text{или} \quad 24c = 10k_3 + c \quad k_3 \in \mathbb{Z}$$

такое невозможно, так

$$0 < c < 10$$

$$24c = 10k_3$$

23 и 10 взаимнопросты,

2) при $a = 5$ и $b = 5$

$$abc = 25c \equiv c \pmod{10} \quad 25c = 10k_3 + c, \quad k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$24c = 10k_3$$

$$12c = 5k_3$$

$$0 < c < 10$$

$\Rightarrow c = 5 \leftarrow$ подходит

$\Rightarrow$ число 555 подходит

при $a = 0$ и любых b

$$abc = 0 \equiv 0 \equiv c \pmod{10} \Rightarrow \text{если } 0 < c < 10 \text{ нет}$$

подходящих c

при $b = 1$

$$ac \equiv c \pmod{10}$$

$$ac = 10k_3 + c$$

и любых a кроме 0

$$(a-1)c = 10k_3$$

$\Rightarrow$ либо $(a-1) \cdot 5$

либо $a, c \cdot 5$

при $c \neq 0 \Rightarrow$

1) $(a-1) \cdot 5 \quad a = 6 \text{ или } a = 1$

2) $c \cdot 5 \quad c = 5 \text{ (так } c < 10)$

при $a = 6$ или $a = 1$ и четном

четном $c \quad (a-1)c = 10 \leftarrow$

при $c = 5$ и четном a

будет выполнено $(a-1)c = 10k_3$ - будет

выполняться

но при $b = 1 \quad a = 9$

те подходящих вар-ов нет

Т.е. нам подходит ($b = 10 - a$)

~~$abc = 555$~~

~~$a = 1 \quad b = 9 \quad c - \text{четное}$~~
Т.е. ~~$a = 1 \quad b = 9$~~

~~$c = 2 \quad a + b + c = 12$~~

~~$ab + bc + ca = 9 + 18 + 2 = 29$~~

~~$abc = 18$ не подходит~~

При $b = 1 \quad a = 10 - b = 9$

$a(c-1)(a-1)c = 10k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$

~~$8c = 10k_3, k_3 \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad c = 5k_3 \Rightarrow c \leq 5, \text{ так } 0 < c \leq 10 \Rightarrow$~~

~~$c = 5$ число 915 - тоже подходит~~

~~$a + b + c = a = 9 \quad b = 1 \quad c = 5$~~

~~$a + b + c = 15$~~

~~$ab + bc + ca = 9 + 45 + 5 = 59$~~

При $b = 1 \quad a = 9$

~~$ab + bc + ca = 10k_2 + b, k_2 \in \mathbb{Z}$~~

~~$10c + 9 = 10k_2 + 1$~~

$b(a-1) \mid 10$ и $a+b=10$

Т.е. должно выполняться

это возможно когда либо $b = 5$ и $(a-1)$ - четное, либо

$a-1 = 5$ и b - четное

1) $b = 5$ при $b = 0$ или $b = 5 \quad a = 5$

$a = 10 \leftarrow \text{такого быть не может}$

✓

2) $a-1 = 5 \quad (a = 1 \text{ и } b = 9) \text{ или } a = 6 \text{ и } b = 4$

Бланк ответов

При $b=5$ и $a=5$

$$abc = 25c = 10k_3 + 5, \quad k_3 \in \mathbb{Z} \text{ из п3 уса}$$

$$5c = 2k_3 + 1$$

~~$$\text{или } (2k_3 + 1)5$$~~

$2k_3 + 1$ - нечетное $\Rightarrow c$ тоже нечетное (тк $5c$ - должно быть нечет)

~~При $c=1$~~ ~~и т.д.~~

Т е подходит

551, 553, 555, 557, 559, +

~~тк abc точно нечет и имеет 5 в разлост на прост~~
~~и кон, то $a=5, 0$~~

При $b=9$ $a=1$

$$9c = 10k_3 + 1, \quad k_3 \in \mathbb{Z}$$

$9c \equiv 1 \pmod{10}$, тогда при $0 < c < 10$ при $c=9$ и все

т е подходит число

199 +

При $b=4$ $a=6$

$$24c = 10k_3 + 6, \quad k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$12c = 5k_3 + 3$$

тк $12c$ - чет и $c \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

~~$$n2) c/0 + 24 = 10k_2 + 4$$~~

~~$$(5k_3 + 3)12$$~~

выполняется при $k_3 \equiv 3$ и нечет k_3 и тогда

тк $k_3 \equiv 3$ $0 < c < 10 \Rightarrow$

$$k_3 < 24 \quad (5k_3 + 3 < 120)$$

$$k_3 = 3$$

$$15 + 3 = 18 \not\equiv 12$$

$$k_3 = 9$$

$$45 + 3 = 48 = 12c \Rightarrow c = 4$$

подходит число

$$k_3 = 15$$

$$15 \cdot 5 + 3 = 78 \not\equiv 12$$

$$k_3 = 21$$

$$21 \cdot 5 + 3 = 108 = 12c \Rightarrow c = 9$$

подходит число 644 ✓

и т.д. след $k_3 \geq 24$

Ответ числа
получаем такие же
силу симметрии

При других послед abc
итоговые числа в

Ответ 551, 553,

555 557 559 199

644

649

+

Задача 2

Вместе может ~~и~~ так случиться, что
цель 3а

Пример пронумеруем игроков от 1 до 8

Пусть в первом туре играли такие

пары: 14, 26, 38, 57

2-ой туре 18, 27, 36, 45

3-ей туре 17, 24, 35, 68

4-ой туре 16, 25, 37, 48

5-ой туре 15, 28, 34, 67

При таких комбинациях оказалось, что

1-ый игрок сыграл с ~~и~~ 4 5 6 7 8

и ему можно играть только с (2 и 3)

2-ой игрок сыграл с 4 5 6 7 8

и ему теперь можно играть только с (1 и 3)

3-ий игрок сыграл с ~~и~~ 4 5 6 7 8

и ему можно играть только с (1 и 2)

Тогда ~~если не~~ если первого посадить
со вторым, то 3-ему будет нечем
играть, если ~~второго~~ по первого

посадить с 3-им, то все возможные

партеры 2-ого будут заняты и ему

~~тоже~~ будет нечем играть, а

первого нечем другим посадить

цель 3а $\Rightarrow$ провести бой тур

цель 3а

(+)

всего 1

Задача 4

$$2^{xy} z = 2^{x+y} (x+y+z)$$

условия $xy = a$
 $x+y = b$

$$2^a z = 2^b (b+z)$$

~~так $x^2 + y^2 + 2xy = a^2$~~

$$\frac{2^a}{2^b} = \frac{b}{z} + 1$$

$$b^2 > 2a$$

~~т.е. при $a > 2$~~

~~при $a > 2$~~

~~$a > b$
 $b > a$~~

$$2^{\frac{a}{b}} = \frac{b}{z} + 1 \quad \text{при } z \neq 0$$

~~ЗЗЗ при $\frac{a}{b} < 1$ $2^{\frac{a}{b}} < 2$ так $\frac{b}{z}$~~

~~б и z невыразимые $z > \frac{b}{z} + 1 > 1 \Rightarrow$~~

~~$a < b$ - не можем $\Rightarrow a > b$~~

при $a \geq b$ $xy \geq x+y$ $x(y-1) \geq y$

при $x \neq 1$ и $y \neq 1$ $y(x-1) \geq x$
 $x \geq \frac{y}{y-1}$ $x \geq 1 + \frac{1}{y-1}$

$y \geq \frac{x}{x-1}$ $y \geq 1 + \frac{1}{x-1}$ $b-x+y \geq 2 + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{x-1}$
 $a=xy \geq 1 + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{x-1}$

$a \geq b \Rightarrow 1 + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{x-1} \geq 2 + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{x-1}$

$\frac{1}{y-1} + \frac{1}{x-1} \geq 1$ $(x-1)(y-1) \leq 1$

$x-1 \geq 0$ $y-1 \geq 0$ при $x > 1$ и $y > 1$ так как x и y натуральные

$x \geq 2$ и $y \geq 2 \Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 1$ так как $(x-1)(y-1) \leq 1$

$\Rightarrow (x-1)(y-1) = 1 \Rightarrow$ где натуральные x и y .

$$x=2 \quad y=2 \quad \text{тогда}$$

$$2^{2z} z = 2^4 (4+z)$$

$$z = 4+z \leftarrow \text{нет корней где } z$$

Но мы не рассматривали случаи, где

при $y \neq 1$ или $x=1$, тогда

$$2^y z = 2^{1+y} (x+y+z)$$

$$z = 2 + 2y + 2z \Rightarrow 2 + 2y = -z, \text{ так } z > 0$$

$$\text{и } 2y+2 \geq 0 \Rightarrow$$

нет корней решений

при $y=1$ — ситуация симметрична $\Rightarrow$

снова нет решений

$$\frac{a}{b} < x \quad \frac{a}{b} < y \Rightarrow \frac{a}{b} < xy \quad \text{так } xy - \text{натур}$$

$$\text{при } \frac{a}{b} < 1 \quad \frac{b}{z} < 1$$

$$\frac{xy}{x+y} < 1, \quad \frac{x}{z} + \frac{y}{z} < 1$$

$$xy < x+y \quad x+y < z$$

$$xy < x+y < z \Rightarrow$$

предположений нет