ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302700542586

Титульный лист

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия ГРИБОВСКАЯ

Имя ВИКТОРИЯ

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 30 10 2007

Город участия КЕМЕРОВО

Аудитория 43

Телефон 89137370414

Дата 03 02 2025 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302700542586

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Город участия КЕМЕРОВО

Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с

до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	0	—					
Балл члена жюри №2	20	20	20	0						

Итоговый балл 50

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

Задание 1

Условия 1) 2) 3) симметричны отн-но (a в,c) => без огр общности можно считать, что искомое число $\overline{abc}$

Тогда Последняя цифра числа X - это остаток X по модулю 10

1) $c \underset{10}{\equiv} a+b+c \Leftrightarrow a+b \underset{10}{\equiv} 0$ Но a, b, c - это цифры => $a,b,c \in [0,9]$ то есть

максимальная сумма двух цифр - $18=9+9$ Значит $a+b \underset{10}{\equiv} 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=10, \text{ тк } a+b \in [0,18] \\ a+b=0 \end{array}\right.$

3) $a \underset{10}{\equiv} abc$ Тк цифра стоит в разряде сотен то она не может быть равна 0

А значит, что никакая из цифр a, b, c не равна 0, иначе $abc=0 \Rightarrow (abc \underset{10}{\equiv} 0) = a \Rightarrow$

$\Rightarrow a\,b\,c \in [1\ 9]$

А значит, что $a+b=10$, тк $a+b=0$ достигается только при $a=b=0$

2) $b \underset{10}{\equiv} ab+bc+ac \Leftrightarrow b \underset{10}{\equiv} ab+c(a+b) \Leftrightarrow b \underset{10}{\equiv} ab+10c \Leftrightarrow b \underset{10}{\equiv} ab$, тк $b=10-a$,

$\Leftrightarrow 10-a \underset{10}{\equiv} a(10-a) \Leftrightarrow (10-a)(a\ 1) \underset{10}{\equiv} 0 \Leftrightarrow 10a-10-a^2+a \underset{10}{\equiv} 0 \Leftrightarrow a \underset{10}{\equiv} a^2 \quad a \in [1,9]$,

переберем все возможные значение a от 1 до 9

a	$a \underset{10}{\equiv}$	a^2	$a^2 \underset{10}{\equiv}$	подошло?
1	1	1	1	+
2	2	4	4	—
3	3	9	9	—
4	4	16	6	—
5	5	25	5	+
6	6	36	6	+
7	7	49	9	—
8	8	64	4	—
9	9	81	1	—

Из таблицы видно, что подошли $a=1$ $a=5$ $a=6$

Тогда $b=a-10$ соответственно $b=9$, $b=5$ $b=4$

Разберем эти 3 случае

1) $a=1$, $b=9$ Тогда усл 2) $\Leftrightarrow b \underset{10}{\equiv} 9+9b+c \Leftrightarrow 9 \underset{10}{\equiv} 9+10c \Leftrightarrow 9 \underset{10}{\equiv} 9$ А условие

3) $\Leftrightarrow a \underset{10}{\equiv} 9c \Leftrightarrow 1 \underset{10}{\equiv} 9c$ Переберем все возможные c

c	$9c$	$9c \underset{10}{\equiv}$
1	9	9
2	18	8
3	27	7
4	36	6
5	45	5
6	54	4
7	63	3
8	72	2
9	81	1

Значит подошел только 1 вариант $\overline{abc}=199$

$a+b+c=19$

$ab+bc+ac=99$ все подошло

$abc=81$

2) Рассмотрим $a=5$, $b=5$. Тогда ур (3) $\Leftrightarrow 5 \underset{10}{\equiv} 25c$ Переберем c

c	$25c$	$25c \underset{10}{\equiv}$
1	25	5
2	50	0
3	75	5
4	100	0
5	125	5
6	150	0
7	175	5
8	200	0
9	225	5

Подошли $c=1,3,5,7,9$ Из соображений на a и b с пред стр они все подходят Т.е $\overline{abc} = 551$ 553 555 557, 559

3) Случай $a=6$, $b=4$: Условие (3) $\Leftrightarrow 6 \underset{10}{\equiv} 24c$ Переберем c

c	$24c$	$24c \underset{10}{\equiv}$
1	24	4
2	48	8
3	72	2
4	96	6
5	120	0
6	144	4
7	168	8
8	192	2
9	216	6

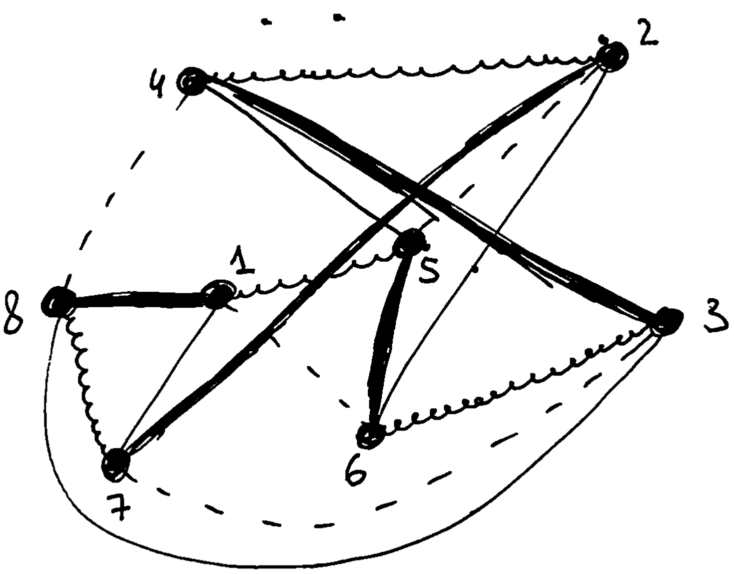
Подошли $c=4$ и $c=9$ То есть $\left[\begin{array}{l}\overline{abc} = 644 \\ \overline{abc} = 649\end{array}\right.$

Ответ 644, 649, 551, 553, 555, 557, 559, 199

+

Бланк ответов

Задача 2 Да, можно Например первые 5 туров выглядели так ~~1 тур~~ те, что играли в первом туре обозначены —, во втором ~~~, в третьем - - -, в четвертом , в пятом ▬ Вершины графа участники турнира, ребра - сыгранные турниры



У каждой вершины есть номер

в I туре играли $4 с 5, 1 с 7, 3 с 8, 2 с 6$

во II $2 с 4, 1 с 5, 3 с 6, 8 с 7$

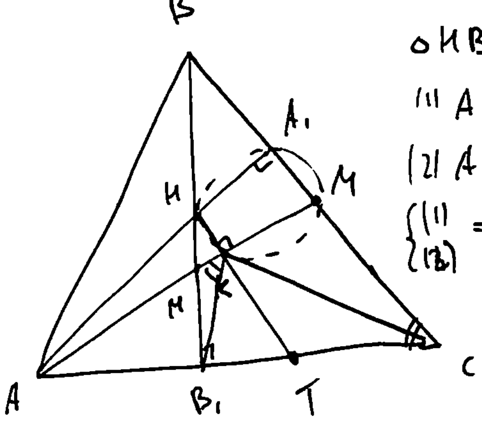
в III $4 с 8, 2 с 5, 3 с 7, 1 с 6$

в IV $1 с 4, 2 с 8, 3 с 5, 6 с 7$

в V $7 с 2, 5 с 6, 1 с 8, 3 с 4$

Посмотрим на участников 1, 2, 3 1 не играл только с 2 и 3, 2 не играл только с 1 и 3, 3 не играл только с 1 и 2 Тогда подумаем с кем может играть 1 в 6ом туре — или с 2 или с 3 ~~Во тогда с кем же играть~~ Пусть 1 с 2 Но тогда участнику 3 играть не с кем Если 1 будет в паре с 3, то не с кем играть участнику 2 А значит шестой тур провести не получится +

Задача 3



$\angle HKM = 90°$ тк $\angle HA_1M = 90°$ а HKA_1M вписан

$\triangle HBA_1 \sim CBB_1 \Rightarrow \angle C = \angle BHA_1$ B_1HA_1C вписан тк $\angle HA_1C = \angle HB_1C = 90$

(1) $AH\ AA_1\ AK\ AM$ как касат к окр он вокр $HKMA_1$

(2) $AH\ AA_1 - AB_1\ AC$ как касат к окр вокр B_1HA_1C ✓

(1),(2) $\Rightarrow KMCB_1$ вписан $\Rightarrow \angle B_1KM = 180 - \angle C \Rightarrow \angle AKB_1 = \angle C$

если доказать, что $\angle MKC = \angle AKB_1$, то AK биссектр, тк $\angle AKT - \angle MKT = 90°$

+

Линия отреза

Задача 4

$x, y, z \geq 1$ т.к. они нат.

$2^{xy} z = 2^{x+y}(x+y+z)$

$2^{xy-x-y} = \frac{x+y}{z} + 1 \Rightarrow 2^{xy-x-y} \geq 1 \Rightarrow xy \geq x+y$

$z = \frac{x+y}{2^{xy-(x+y)}-1}$, и $z \geq 1 \Rightarrow x+y \geq 2^{xy-(x+y)} - 1$

Если x или $y = 1$ то

$2^{x} z = 2^{x+1}(1+x+z)$

$\Updownarrow$

$z = 2(\cancel{x}+z+1)$

$\Updownarrow$

$2y+z+1=0$

а это ложь, т.к. $y \geq 1$ и $z \geq 1$

$x+y \geq 2$

1) $x+y=2$ Тогда $x=1$ и $y=1$ тогда $z = \frac{2}{0} \Rightarrow x+y \neq 2$

2) $x+y=3 \Rightarrow (x,y) = (1,2) \Rightarrow z = \frac{3}{2^{2-3}-1} < 0 \Rightarrow x+y \neq 3$

3) $x+y=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x,y)=(2,2)\\ \cancel{(x,y)=(1,3)}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{4}{2^{4-4}-1}\\ \cancel{z = \frac{4}{2^{3-1}-1}}\end{array}\right. \Rightarrow x+y \neq 4$

4) $x+y=5 \Rightarrow \begin{array}{l}(x,y)=(4,1)\\ (x,y)=(2,3)\end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{5}{2^{4-5}-1}\\ z = \frac{5}{2^{6-5}-1} \Rightarrow z=5\end{array}\right.$

$x=4$ $y=1$ $z=5$

$x=1$ $y=4$ $z=5$

подошло

5) $x+y=6 \Rightarrow \begin{array}{l}(x,y)=(3,3)\\ (x,y)=(2,4)\end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{6}{2^{9-6}-1} = \frac{6}{7}\\ z = \frac{6}{2^{2}-1} = 2\end{array}\right.$

Тройка $(2,4,2)$ подошла

6) $x+y=7 \Rightarrow \begin{array}{l}(x,y)=(2,5)\\ (x,y)=(3,4)\end{array} \Rightarrow z = \frac{7}{2^{10-7}-1} = 1$, $z = \frac{7}{2^{12-7}-1} < 1$

$\Rightarrow$ $x=3$, $y=4$, $z=7$ и $x=4$, $y=3$, $z=7$ подошло

7) $x+y=8 \Rightarrow (x,y)=(2,6)$ не подходит; $(x,y)=(3,5)$ не подходит; $(x,y)=(4,4)$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{8}{2^{4}-1} \notin \mathbb{N}\\ z = \frac{8}{2^{7}-1} < 1\\ z = \frac{8}{2^{16-8}-1} < 1\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ При увеличении $x+y$ очень возрастает 2^{xy-x-y} и z становится меньше 1

Ответ

x	y	z
1	4	5
4	1	5

и

x	y	z
2	4	2
4	2	2

и

x	y	z
3	4	7
4	3	7