



1302824542024

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия З И Н О В Ь Е В

Имя П А В Е Л

Отчество А Л Е К С Е Е В И Ч

Дата рождения 3 0 1 1 2 0 0 7

Город участия К Е М Е Р О В О

Аудитория 2 0 3

Телефон + 7 9 2 3 1 9 1 2 0 5 0

Дата 0 3 0 2 2 0 2 5

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



1302824542024

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия К Е М Е Р О В О

Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с

до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	—	5	0					
Балл члена жюри №2	20	0	—	5	0					

Итоговый балл 25

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1

Пусть a - первая цифра N , b - вторая и c - третья, т.е. $N = \overline{abc}$ тогда изначальные условия будут выглядеть так

$$\begin{cases} a = \text{послед цифра } a+b+c \\ b = \text{послед цифра } ab+bc+ca \\ c = \text{послед цифра } abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv a+b+c \pmod{10} \Rightarrow b+c \equiv 0 \pmod{10} \\ b \equiv ab+bc+ca \pmod{10} \\ c \equiv abc \pmod{10} \end{cases}$$

т.к. a, b, c - цифры, то $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $a \neq 0$ тогда $b+c \leq 18$

$$\begin{cases} b+c = 10 \\ b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow b \equiv a(b+c) + bc = 10a + bc \equiv bc \pmod{10}$$

← соответствует случаю $N=100k$, где $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$
Какие значения могут принимать b и c чтобы удовлетворяли первому и второму равенствам?

b	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
c	9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

$(9, 1), (5, 5), (4, 6)$ удовлетворяют $b \equiv c \pmod{10}$

Остается подставить все a от 1 до 9 и найти возможные тройки чисел (a, b, c)

abc	$(a, b, c) \pmod{10}$
146	4
155	5 ✓
191	9
246	4
255	5
291	9
346	4
355	5 ✓
391	9
446	4 ✓
455	5
491	9
546	4
555	5 ✓
591	9
646	4
655	5
691	9
746	4
755	5 ✓
791	9
846	4
855	5
891	9
946	4 ✓
955	5 ✓
991	9 ✓

Те единственные числа удовлетворяющие всем условиям $\{155, 355, 446, 555, 755, 946, 955, 991\}$

К этому же ответу можно было прийти не простым перебором, а рассуждениями при четном a , и при четном a (при $a=2k+1$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ или получим $\sum b+c=10 \Rightarrow b=c=5$)
при $a=9$ - все 3 случая удовл. условиям
при $a=2k$ - единств. случаи - (446)

Ответ $155, 355, 446, 555, 755, 946, 955, 991, 100k$, где $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$

Задача 2.4

$$2^{xy} z = 2^{x+y} (x+y+z)$$

$$z(2^{xy} - 2^{x+y}) = (x+y) 2^{x+y}$$

$$z = \frac{(x+y) 2^{x+y}}{2^{xy} - 2^{x+y}} \quad \Bigg| \cdot \frac{2^{x+y}}{2^{x+y}} \quad \text{т.к. } \forall x, y \in \mathbb{N}, 2^{x+y} \neq 0$$

$$z = \frac{x+y}{2^{xy-(x+y)} - 1}$$

Далее не трудно заметить, что чем больше числа x, y тем больше выражение $xy - (x+y)$ (* не считая $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$), тем больше выражение $2^{xy-(x+y)}$ и тем меньше z т.е. показательная функция возрастает сильнее линейной, т.е. имеет смысл проверять только малые значения x и y

$$\star \quad x=1 \Rightarrow z = \frac{y+1}{2^{-1}-1} = -2(y+1) \in \mathbb{N}$$

$$y=1 \Rightarrow z = \frac{x+1}{2^{-1}-1} = -2(x+1) \in \mathbb{N}$$

$$1) \quad x=2 \Rightarrow z = \frac{y+2}{2^{y-2}-1} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} y & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline z & +\infty & 5 & 2 & 1 & \frac{8}{15} \end{array}$$

$$2) \quad x=3 \Rightarrow z = \frac{y+3}{2^{2y-3}-1} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} y & 2 & 3 \\ \hline z & 5 & \frac{6}{7} \end{array}$$

$$3) \quad x=4 \Rightarrow z = \frac{y+4}{2^{3y-4}-1} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} y & 2 & 3 \\ \hline z & 2 & \frac{7}{31} \end{array}$$

$$4) \quad x=5 \Rightarrow z = \frac{y+5}{2^{4y-5}-1} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} y & 2 & 3 \\ \hline z & 1 & \frac{8}{127} \end{array}$$

$$5) \quad x=6 \Rightarrow z = \frac{y+6}{2^{5y-6}-1} \Rightarrow \begin{array}{c|c} y & 2 \\ \hline z & \frac{8}{15} \end{array}$$

* далее символом "будет ставиться, если нет смысла проверять другие значения, т.к. далее $z < 1$, т.е. $z \notin \mathbb{N}$

+

т.е. наших $x, y \geq 6$ - корней нет, а значит подобраны все возможные тройки чисел

Ответ $(x, y, z) = (2, 3, 5), (2, 4, 2), (2, 5, 1), (3, 2, 5), (4, 2, 2), (5, 2, 1)$

Задание 5

Попробуем придумать модель выбора пустых квадратов
 * Стоит выбирать квадраты двинув по доске слева направо
 так, чтобы спустя каждые три квадрата на одну прямую
 эту тенденцию можно было разорвать

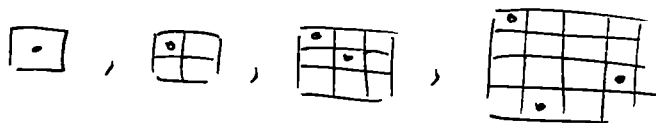
Одна из идей

← и так далее они не будут лежать на одной прямой
 визуализация

Но это не строгое док-во выбора и клеток при больших n

Попробуем доказать по MMI

1) $n = 1, 2, 3, 4$



2) Пусть мы сможем осуществлять задумку для квадрата со стороной n . Покажем, что это возможно и для $n+1$, при любых n

1 $n = 2k$ - т.е. четное

Тогда поделим квадрат на верхний и нижний прямоугольники между которыми вставим полосу из $2k$ клеток, после чего сбоку добавим $2k+1$ клеток из которых выберем среднюю. Таким образом, мы можем не изменяя модели наращивать квадрат от $2k$ до $2k+1$

увеличим сторону до $2k+1$

- выбор при $2k$
 - выбор при $2k+1$
 - выбор при $2k+2$

2 $n = 2k+1$ - т.е. нечетное

Тогда же с первым $2k$ "шагом" поступим аналогично аналогу $n = 2k$, а оставшиеся 2 сдвинем так, чтобы вернуться к исходной модели

Итак мы смогли доказать индукционный переход как для $n = 2k$, так и для $n = 2k+1$

ч.т.д.

Задание 2

В каждом туре проводится 4 ир, а всего ир может быть проведено $7+6+5+4+3+2+1 = 28$, т.е.
 $\max \text{ число туров} = \frac{28}{4} = 7$

Представим возможные ири в виде таблицы, пронумеровав ири этим шахматистов;

#

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	■	■	■					
2	■	■	■	■				□
3	■	■	■	■	■			
4		■	■	■	■	■		
5			■	■	■	■	■	
6				■	■	■	■	■
7					■	■	■	■
8	□							■

Проведя 5 туров будет сыграно 20 ир. Чтобы нельзя было провести 6 тур, нужно хотя бы чтобы нельзя было провести 24-ую иру т.е. нельзя было выбрать соперника.

свойство После каждого тура в каждом столбце должно стать на 1 пустую клетку меньше.

Очевидно, что оставшиеся 8 клеток должны быть симметричны относительно обеих диагоналей. А так это единственное условие на возможность проведения 6 тура и оно выполняется независимо от кол-ва туров то

Ответ Нет, так случиться не может!

Задание 3 - не присудан!



Бланк ответов

