



3101636535062

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия К О Н О Н Е Н К О

Имя Н И К И Т А

Отчество А Н Д Р Е Е В И Ч

Дата рождения 3 0 0 1 2 0 0 7

Город участия И Ж Е В С К

Аудитория 2 1

Телефон 8 9 8 2 8 2 2 4 3 6 5

Дата 0 3 0 2 2 0 2 5 Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



3101636535062

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс

- ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия

И Ж Е В С К

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с

до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	20	20					
Балл члена жюри №2	20	20	20	20	0					

Итоговый балл

80

Подпись

члена жюри №1

Подпись

члена жюри №2

Пример

заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задача 81

Пусть искомого числа $\overline{abc}$
 a - кол-во сотен, b - кол-во десятков, c - кол-во единиц
 Тогда по 1 условию $a+b+c \equiv c \pmod{10} \Rightarrow a+b \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow (a+b) \mid 10$
 По второму условию $b \equiv ab+bc+ca \pmod{10} = ab+c(a+b) \pmod{10}$
 $\equiv ab+c \cdot 0 \pmod{10}$ т.к. $a+b \mid 10 \Rightarrow b \equiv ab \pmod{10}$

П.к. $(a+b) \mid 10$ и a, b - цифры $\Rightarrow$ подходят пары чисел
 $(1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2), (9,1) \checkmark$
 $(0,0)$ - не подходит, т.к. иначе число $\overline{abc}$ - начинается с 0 - такого быть не может. $\checkmark$

Будем проверять по условию 2
 $(1,9) \Rightarrow 1 \equiv 9 \pmod{10}$ - неверно $\checkmark$ $(2,8) \Rightarrow 2 \equiv 16 \pmod{10}$ - неверно $\checkmark$ $(3,7) \Rightarrow 3 \equiv 21 \pmod{10}$ - неверно $\checkmark$
 $(4,6) \Rightarrow 4 \equiv 24 \pmod{10}$ - подходит $\checkmark$ $(5,5) \Rightarrow 5 \equiv 25 \pmod{10}$ - подходит $\checkmark$ $(6,4) \Rightarrow 6 \equiv 24 \pmod{10}$ - неверно $\checkmark$
 $(7,3) \Rightarrow 7 \equiv 21 \pmod{10}$ - неверно $\checkmark$ $(8,2) \Rightarrow 8 \equiv 16 \pmod{10}$ - неверно $\checkmark$ $(9,1) \Rightarrow 9 \equiv 9 \pmod{10}$ - верно $\checkmark$

Итого нам подходят пары $(4,6), (5,5), (9,1)$ +
 где первое число равно b , второе равно a

Тогда 1) $a=6, b=4 \Rightarrow 6 \equiv 24c \pmod{10} \Rightarrow (4c-6) \mid 10 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2(2c-3) \mid 5$ (т.к. $2/5$) $\Rightarrow c=4$ или $c=9$
 подходят $(4,6,4) \checkmark (6,4,9) \checkmark$
 2) $a=5, b=5 \Rightarrow 5 \equiv 25c \pmod{10} \Rightarrow 5 \equiv 5c \pmod{10} \Rightarrow 1 \equiv c \pmod{2} \Rightarrow$ подходят
 любые нечетные $c \Rightarrow$ $(5,5,1), (5,5,3), (5,5,5), (5,5,7), (5,5,9)$
 $\Rightarrow$ Получаем тройки $(5,5,1), (5,5,3), (5,5,5), (5,5,7), (5,5,9)$
 3) $a=1, b=9 \Rightarrow$ (3 условия) $1 \equiv 9c \pmod{10} \Rightarrow$ подходит только
 $c=9 \Rightarrow$ получаем тройку $(1,9,9) \checkmark$

(+)

Задача 52

Пускай расписание первых пяти туров

будет таким

$\begin{matrix} \text{I} \\ 1-4 \\ 2-5 \\ 3-6 \\ 7-8 \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{II} \\ 1-5 \\ 2-6 \\ 3-7 \\ 4-8 \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{III} \\ 1-6 \\ 2-7 \\ 3-8 \\ 4-5 \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{IV} \\ 1-7 \\ 2-8 \\ 3-4 \\ 5-6 \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{V} \\ 1-8 \\ 2-4 \\ 3-5 \\ 7-6 \end{matrix}$

Заметим, что каждый сыграет с каждым не более 1 раза $\Rightarrow$ условие выполнено

Посмотрим на 1, 2, 3 матча

Каждый из них сыграет с 4, 5, 6, 7, 8 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 должен сыграть с 2 или 3

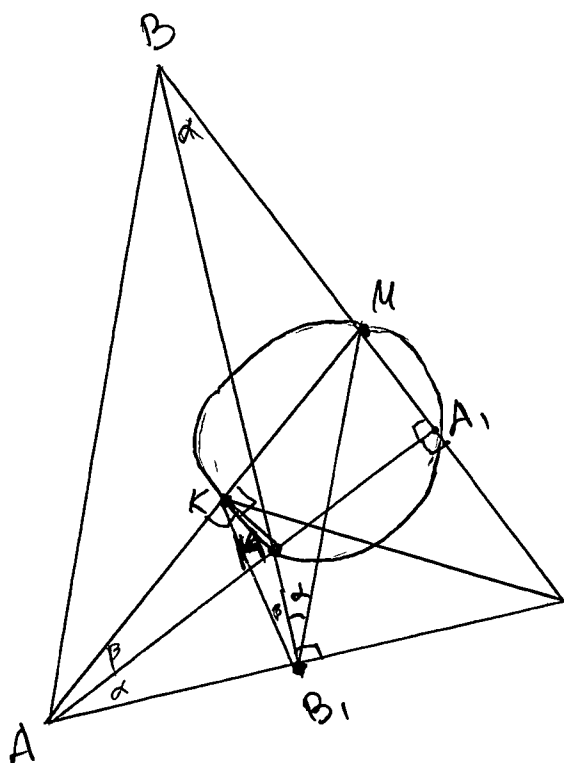
2 должен сыграть с 1 или 3

3 должен сыграть с 1 или 2

Тогда, если 1 играет со вторым, то 3 должен сыграть с кем-то от 4 до 8, но он уже играл с ними, аналогично, если 1 играет с 3, то для 2 соперника нет, аналогично, если 2 играет с 3, то для 1 соперника $\Rightarrow$ возможно, что после 5 туров невозможно провести шестой

~~продолжить турнир,~~
~~отказаться~~

Задача 53



мк A, M, K, H - лежат на одной окружности $\Rightarrow$
 $\Rightarrow A, M, K, H$ - впис $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle MA_1H + \angle MKN = 180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle MKN = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle HKA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
 (мк A, M, K, H - впис)
 $\angle BBA_1 = 90^\circ$ мк BB_1 - высота $\Rightarrow$
 $\angle HKA = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle HKB_1$ - вписанный $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle HAB_1 = \angle HKB_1$ как углы на равн. хордах
 $\angle KAH = \angle KB_1H = \beta$
 Пусть $\angle HAB_1 = \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle HKB_1 = \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle A_1CA = 180^\circ - \angle A_1AC - \angle AA_1C =$
 $= 180^\circ - 90^\circ - \kappa = 90^\circ - \kappa$

$\alpha = \angle CBB_1 = 180^\circ - \angle BB_1C - \angle BCB_1 =$
 $= 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$

мк M - середина $BC \Rightarrow B_1M$ - медиана $\triangle ABC \Rightarrow$
 $\Rightarrow BM = MC = MB_1$, мк $MBB_1 = \alpha$, $BM = MB_1 \Rightarrow \angle BB_1M = \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle CMB_1 = 2\alpha$, как смежный с $\angle BMB_1 =$
 $= 180 - 2\alpha$

Пусть $\angle KAH = \beta \Rightarrow \angle KB_1H = \beta$
 В $\triangle AA_1M$ $\angle MA_1A = 90^\circ$, $\angle MAA_1 = \beta \Rightarrow \angle AMA_1 = 90^\circ - \beta$

$\angle KB_1C = \angle KB_1H + \angle CB_1C = \beta + 90^\circ$ Тогда B_1KMC - вписанный,
 мк $\angle KB_1C + \angle KMC = 90^\circ + \beta + (90^\circ - \beta) = 180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle B_1MC = \angle CKB_1$ как углы опир. на одну хорду
 $\Rightarrow \angle CKB_1 = \angle B_1MC = 2\alpha \Rightarrow \angle CKB_1 = 2\alpha$
 Тк $\angle B_1KH = \alpha \Rightarrow \angle HKS = \angle CKB_1 - \angle B_1KH = 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle B_1KH = \angle SKH \Rightarrow SH$ - бисс. $\angle CKB_1$ (+)

Задача 55

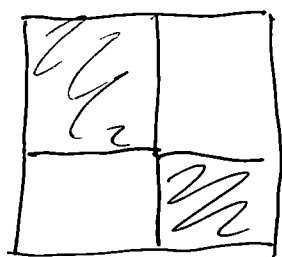
Докажем по индукции база $n=1$

□ - верно

Докажем переход пусть предположим
все $n=1, 2, 3 \dots n-1, n$

Тогда докажем, что $n+1$ предположим
Положим $n+1$ на 2 если $n+1$ - четное,
то получим $\frac{n+1}{2}$ и $\frac{n+1}{2}$, иначе
возьмем $\frac{n-1}{2}$ и $\frac{n+1}{2}$

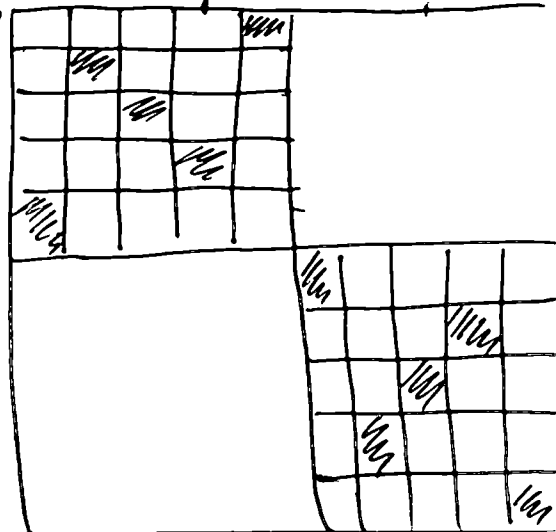
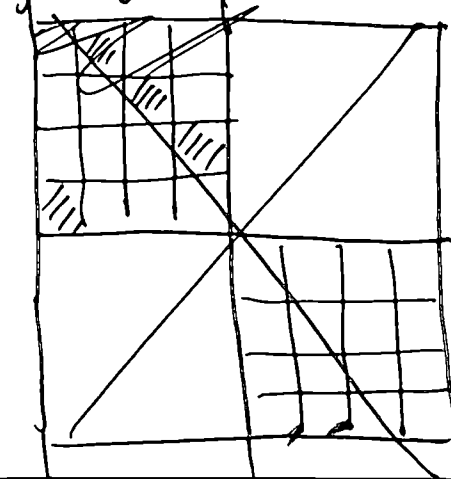
Тогда для этих 4 квадратов с этими
сторонами все верно. Сложим квадраты
таким образом



Где закрашенная часть -
это квадраты со сторона-
ми $x \pm \frac{x+1}{2}$ и $x \pm \frac{x+1}{2}$ или $\frac{x+1}{2}$ и $\frac{x-1}{2}$
соответственно, но второй

квадрат (в правой нижней углу повер-
нём на 90°) $\Rightarrow$ для большего квадрата
 $n \times n$ также будет верно утверждение

почему тогда не найдется 4 квадрата,
центр которых лежит на 1 прямой?
для досок 10×10



Задача 54

$$2^{xy} z = 2^{x+y} (x+y+z)$$

Т.к. ~~неравенство~~ равенство симметрично относительно x и y (если $x=a, y=b$ - решение, то и $x=b, y=a$ - тоже решение), значит, все утверждения относительно x также образуют верны для y

$$\text{Пусть } x=1 \Rightarrow 2^y z = 2^{y+1} (x+y+z) = 2^{y+1} z + 2^{y+1} (x+y)$$

$$\text{но } 2^y z < 2^{y+1} z, \text{ а } 2^{y+1} (x+y) > 0 \Rightarrow x > 1, \text{ а также } y > 1 \quad \checkmark$$

~~Если $x, y \geq 3$, то уравнение~~

$$\begin{aligned} & \text{Также если } xy \leq x+y, \text{ то } 2^{xy} z < 2^{x+y} z + \\ & + 2^{x+y} (y+x) \quad \vee \quad \text{т.к. } xy \leq x+y, \text{ а также } 2^{x+y} (x+y) > 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow xy > x+y \quad \checkmark \end{aligned}$$

Поделим обе части на 2^{x+y}

$$2^{xy-x-y} z = (x+y+z) \Rightarrow z(2^{xy-y-x} - 1) = y+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{y+x}{2^{xy-y-x} - 1} \quad \vee \Rightarrow x+y \geq 2^{xy-y-x} - 1 \quad \text{т.к. } z \in \mathbb{N} \quad \vee$$

$$xy-y-x = (x-1)(y-1)-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y \geq 2^{(x-1)(y-1)-1} - 1 \quad \checkmark$$

Пусть $x, y \geq 3 \Rightarrow x \geq 3$, тогда, если $x=3$, то

$$y+3 \geq 2^{2(y-1)-1} - 1 = 2^{2y-3} - 1 \quad \checkmark, \text{ при } y=3 \Rightarrow \text{то}$$

неравенство уже неверно ($6 \geq 2^3 - 1 = 7$?) Также при увеличении y на k , правая часть увеличивается на k , а левая правая умножается на 2^k неравенство $y+3 \geq 2^{2y-3} - 1$, которое равносильно $y+3 \geq 2^{2y-3} - 1, \Rightarrow$ если $x=3$, то $y < 3$ +

Задача 54 продолжение

Если $x \geq 6$, то уравнение будет сложным,
 $y+6+1 \geq 2^{5y-6} \Leftrightarrow y+7 \geq 2^{5y-6}$

При $y=2$ получаем $9 \geq 2^4 = 16$ — противоречие
 $y > 1$, так доказали ранее

Если $y \geq 2 \Rightarrow y = 2+k$, то

$$y+7 = 2+k+7 \geq 2^{5k+4} \Leftrightarrow 9+k \geq 2^{5k+4}, \text{ но это}$$

неверно для $k \geq 0$, так при $k=0$ получили

$9 \geq 2^4 = 16$, а при увеличении k левая часть

увеличит на p , а правая умножается на $2^{5p} \checkmark$

$\Rightarrow$ правая часть будет больше (ведь изначально
 была больше и растет быстрее) $\checkmark$

Если $x \geq 7$, то $x \geq 6$, то x увеличит $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ левая часть увеличит на $|x-6| = k$, а правая
 хотя бы на $2^{(y-1)(k)-1}$ так была $2^{(y-1)(x-1)-1}$, а стала

$$2^{(y-1)(k)-1} \Rightarrow \text{также растет быстрее} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \leq 5$, но при этом одновременно x, y не
 могут быть $\geq 3 \Rightarrow$ проверим пары $(2,2), (2,3),$

$(2,4), (2,5)$

1) $x=2, y=2 \Rightarrow z = \frac{4}{2^{(2-1)(2-1)-1} - 1} = \frac{4}{0}$ — не возможно

2) $x=2, y=3 \Rightarrow z = \frac{2+3}{2^{(2-1)(3-1)-1} - 1} = \frac{5}{2^1 - 1} = 5 \checkmark$

$\Rightarrow x=2, y=3, z=5$ или $x=3, y=2, z=5$ (в силу
 симметричности x и y) подходит

3) $x=2, y=4 \Rightarrow z = \frac{6}{2^2 - 1} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2, y=4, z=2$ или $x=4, y=2, z=2$ — подходит

4) $x=2, y=5 \Rightarrow z = \frac{7}{2^3 - 1} \Rightarrow z=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2, y=5, z=1$ или $x=5, y=2, z=1$ подходит