ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101636523162

Титульный лист

Направление
- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия КОСИЦЫН

Имя ВАСИЛИЙ

Отчество ИВАНОВИЧ

Дата рождения 11 10 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И527Б

Телефон 89617681546

Дата 03 02 2025 **Подпись** Кос

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101636523162

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп листов 5 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	0	20	—	15	0					
Балл члена жюри №2	0	20	—	15	0					

Итоговый балл 35

Подпись члена жюри №1

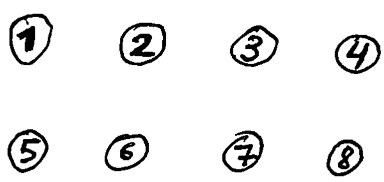
Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

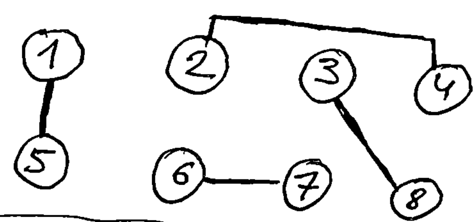
№2 распределим 8 шахматистов следующим образом, для удобства



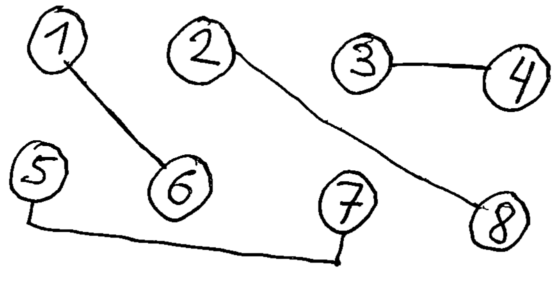
В дальнейшем пусть 1 — 2 означает игру 1 и 2 шахмат

Приведу пример, где после 5 туров, НЕВОЗМОЖНО провести 6 тур

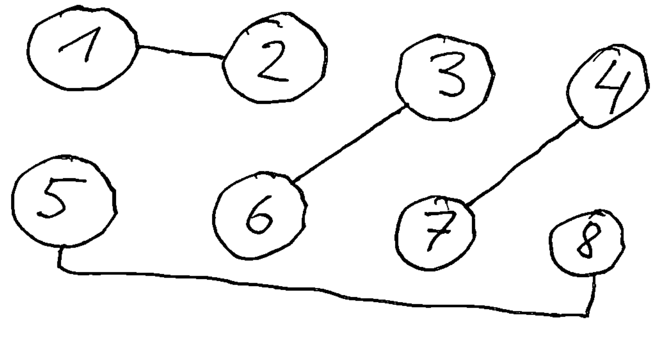
I тур



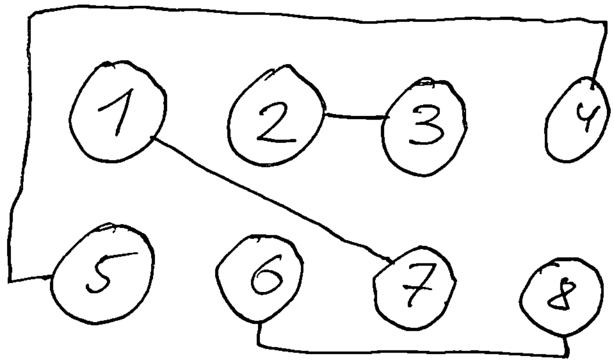
II тур



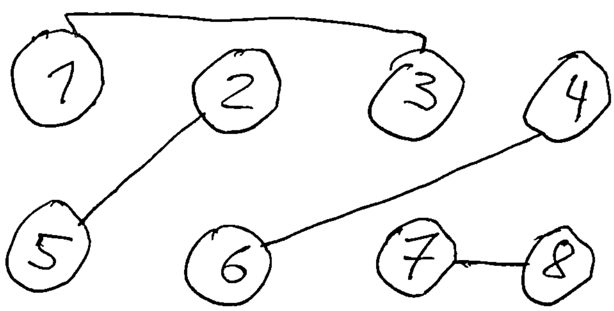
III тур



IV тур



V тур



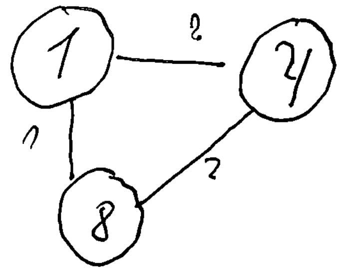
	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2	3							
3	5	4						
4	V	1	2					
5	1	5		4				
6	2		3	5				
7	4			3	2	1		
8	V	2	1	V	3	4	5	

В итоге

1 сыграл с 5; 6; 2, 7, 3
ему в 6 туре можно сыграть только
с или 4 или 8

4 сыграл с 2; 3, 7, 5; 6
ему в 6 туре можно сыграть только
с или 1 или с 8

8 сыграл с 3, 2, 5, 6, 7
ему в 6 туре можно сыграть только
с или 1 или 4



если в 6 раунде 1 сыграет с 4, то 8 осталась без пары, невозможно провести 6 тур

или

1 сыграет с 8, то 4 осталась без пары, невозможно провести 6 тур

возможна игра между 1 и 8

+

№4.

$$2^{xy} z = 2^{x+y}\cdot(x+y+z) \qquad x, y, z \in N$$

т к $2^{x+y} \neq 0$ то поделим на 2^{x+y}

$$2^{xy-x-y+1-1}\cdot z = x+y+z$$

Пусть $z=0$, $0 = x+y$ $x>0$, $y>0$

нет решений $z \neq 0$

поделим на $z \neq 0$

$$2^{x(y-1)-(y-1)-1} = \frac{x+y+z}{z}$$

$$\frac{2^{(x-1)(y-1)}}{2} = \frac{x+y}{z} + 1 \qquad z \neq 0$$

(I) левая часть

(II) правая часть

$x = 1, 2,$

Пусть $x = 1$

$\frac{1}{2} = \frac{1+y}{z} + 1$; $\frac{1+y}{z} + 1 > 1$

нет корней $x \neq 1$

аналогично пусто $y = 1$; корней нет

$y \neq 1$

$x_{мин} = y_{мин} = 2$

Подст

$1 = \frac{2+2}{z} + 1$ нет корней

$\frac{4}{z} + 1 > 1$

Пусть $x = 3$ $y = 2$

$2 = \frac{3+2}{z} + 1$ $z = 5$

Следует заметить, что если $x = x_0$ корень, $y = y_0$ корень, $z = z_0$ корень, то будет еще корни

$x = y_0$; $y = x_0$; $z = z_0$

То есть

$x = x_0$
$y - y_0$ корни следовательно и набор $x = y_0$, $y = x_0$, $z = z_0$ будут корнями
$z = z_0$

Следов уже есть 2 решения $(3, 2, 5)$ и $(2, 3, 5)$ +

Следует заметить что в левой части находится ~~степенная~~ показательная $f(y)$ f; которая увеличивается быстрее чем линейная f справа. При этом ~~л~~ левая, ~~правая~~ часть возрастает на всем промежутке.

Левая часть (I) это степенная функция
Правая часть II это прямая.

Пусть $z=1$,
при его значении $= 1$;
II достигает максимума

~~(степенная f может иметь 2 пересечения с прямой, 1 + пересечение)~~

~~Или же имеют точек пересечения вовсе, Так как уже нашли 2 набора корней (3, 2; 5) и (2; 3, 5), следовательно, прямая имеет 2 пересечения с степенной функцией и корней больше нет~~

Пусть $x = 3$ $y = 3$

тогда

$8 \neq \frac{6}{z} + 1$ нет реш

(•) Пусть $x = 4$, $y = 3$

тогда

$2^{3 \cdot 2 - 1} = 32 \neq \frac{7}{z} + 1$ нет реш

Пусть $y = 3$ $y_{мин} = 3$ т.к остальные случаи рассм

Докажем что при $y_{мин} = 3$, а след и $y > 3$

$n = x = 4$ нет реш

(•) при $y = 3$ что? т.к, ст $f >$ прямой в чем утв индукции?

база индукции для $x \geq 4$

$n = k$ верно

$$\frac{2^{2(k-1)}}{2} > \frac{3 + k - 1}{z} + 1$$

$$2^{2k-3} > k + 3$$

Пусть $z = 1$

при этом достигается максимум правой части дополнительный лист

№ 1

$n = k+1$

$2^{2k-1} > k^{\frac{k+1+3}{z}+1} + 3 + 1$ при $z=1$?

т к из $n=k$, $k+4 < 2^{2k-3}$

$2^{2k-1} > 2^{2k-3} + 1$

$\frac{2^{2k}}{2} > \frac{2^{2k}}{8} + 1 \quad | \cdot 8$

Пусть $2^{2k} = t$, $t > 1$ т к $x \geq 4$ след $2^{2k} > 1$

$4t > t + 8$

$3t > 8$ ← тоже верно, т к $k \geq 4$

т к $t > 1$ то верно $\forall k$,

При увеличении x ; а y = минимальному значению 3 (т к $y<3$ разм)

то корней нет

$\forall x \geq 4$, $y \geq 3$ корней нет

если $y = 3$, $x=2$ корень записан,

$x=3$ корней нет

$x \geq 4$ корней нет

Пусть $y = 2$

При $y = 2;$ $x=3$ корень

$x = 4$ (?)

дополнительный лист

№2

$$2^{1 \cdot 3 - 1} = \frac{2+4}{z} + 1$$

$$2^2 = 4 = \frac{6}{z} + 1$$ $z=2$ корень

Следовательно $(4, 2, 2)$ корень

$(2; 4; 2)$ корень

Пусть $x=5$

$$2^3 = 8 = \frac{5+2}{z} + 1$$, $z = 1$

$(5; 2; 1)$ корень

$(2; 5, 1)$ корень

Пусть $x=6$

$$2^4 = 16 = \frac{6+2}{z} + 1$$ корней нет

Пусть , $y=2$,

$x=6$ база инд

$x=k$ верно

$$2^{k-2} > \frac{k+2}{z} + 1$$

дополнительный лист

№3

$\cancel{x} = k+1$ док-ть

$$2^{k-2}\cdot 2 > \frac{k+2+1}{2} + 1$$

$$2^{k-2}\cdot 2 > 2^{k-2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$2^{k-2} > \frac{1}{2} + 1$$

$$1 + \frac{1}{2} \leq 2$$

т.к. $k \geq 6$, $2^{k-2} \geq 2^{\cancel{6}4}$ ±

следоват $x = k+1$ верно

При $y = 2$, $x \geq 6$ корней нет

Ответ: $(3, 2, 5)$; $(2, 3, 5)$, $(2, 4, 2)$, ; $(4, 2, 2)$, $(5, 2, 1)$, $(2, 5, 1)$

$\dot{+}$

№1 дополнительный лист

$\overline{abc}$, $a \neq 0$ иначе не

Пусть наше число $= \overline{abc}$ трехзначное число

Пусть $f(x) =$ последняя цифра числа x где a может $= b$ может $= c$

Например $f(221) = 1$

Условия

1) $c = f(a+b+c)$

2) $b = f(ab+bc+ac)$

3) $a = f(abc)$

Дополнительный лист

№4

Если $b = 0$, то из 3) $a = 0$ ✗

Если $c = 0$, то из 3) $a = 0$ ✗

След $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$

Пусть $a = 1$

Тогда из 3) Произведение bc оканчна 1

Откуда

b	c	1)	
∅ 1	1	$1 = f(1+1+1)$ ∅	Проверим 2):
∅ 3	7	$7 = f(7+3+1)$ ∅	
∅ 7	3	$3 = f(7+3+1)$ ∅	$9 = f(9+81+9)$ ok
ok 9	9	$9 = f(9+1+9)$ ok	

При $a = 1$; $b = 9$, $c = 9$ 199 +

Пусть $a=2$ дополнительный лист

из ③ $2=f(2bc)$

№5

$bc=2$ $2z=\_\_2$

b	c
1	1
3	4
4	3
2	6
6	2
4	8
8	4
6	7
7	6
9	8
8	9

$2z=2$

$2z=12$

$2z=22$ 11 $\varnothing$

$2z=32$

$2z=42$

$2z=52$ $\varnothing$ 13

$2z=62$ $\varnothing$ 31

$2z=72$

$2z=82$ $\varnothing$ 41

$2z=92$ $\varnothing$ 23 $2z\leq 812$

$2z=102$ $\varnothing$ 17 $2z\leq 162$

$2z=112$

$2z=122$ $\varnothing$ 61

$2z=132$ $\varnothing$ 11

$2z=142$ $\varnothing$ 71

$2z=152$ $\varnothing$ 19

$2z=162$

b	c
1	1
2	3
3	2
4	4
2	8
8	2
3	7
7	3
6	6
9	4
4	9
7	8
8	7
9	9

1 6 7

6 1

$a = 2$

b	c	$c = f(a+b+c)$
$\emptyset$ 1	1	$1 = f(2+1+1)$
$\emptyset$ 2	3	$3 = f(2+3+2)$
$\emptyset$ 3	2	$2 = f(2+3+2)$
$\emptyset$ 4	4	$4 = f(4+4+2)$
$\emptyset$ 2	8	$8 = f(2+8+2)$
✓ 8	2	$2 = f(8+2+2)$
$\emptyset$ 3	7	$7 = f(3+7+2)$
$\emptyset$ 7	3	$3 = f(7+3+2)$
$\emptyset$ 6	6	$6 = f(6+6+2)$
$\emptyset$ 9	4	$4 = f(9+4+2)$
$\emptyset$ 4	9	$9 = f(9+4+2)$
$\emptyset$ 7	8	$8 = f(7+8+2)$
✓ 8	7	$7 = f(8+2+7)$
$\emptyset$ 9	9	$9 = f(9+9+2)$

$b = f(ab+bc+ac)$

Доп. лист №6

$\emptyset$

$8 = f(\overset{16}{2\cdot 8} + \overset{4}{2\cdot 2} + \overset{16}{2\cdot 8})$

$8 = f(\overset{56}{7\cdot 8} + 14 + \overset{30}{16})$

$\emptyset$

При $a = 2$ нет чисел +

Пусть $a = 3$

③ $3 = f(3bc)$

b	c	$c = f(a+b+c)$
$\emptyset$ 1	1	$1 = f(3+1+1)$
$\emptyset$ 9	9	$9 = f(3+9+9)$
$\emptyset$ 3	7	$7 = f(3+7+3)$
✓ 7	3	$3 = f(7+3+3)$

$b = f(ab+bc+ac)$

$7 = f(21+9+21)$

$\emptyset$

При $a = 3$ Нет чисел +

Пусть $a=4$ $4(bc-1)\ 10$

3 $4=f(4\ b\ c)$

Дополнительный лист №7

b	c	$c=f(a+b+c)$
~~0~~1	1	$1=f(4+1+1)$
~~0~~3	7	$7=f(3+7+4)$
~~0~~7	3	$3=f(7+3+4)$
~~0~~9	9	$9=f(9+9+4)$
1	6	
6	1	
2	3	

неполный перебор

При $a=4$ нет чисел —

Пусть $a=5$

$5=f(5b\ c)$ $5(bc-1)\ 10$

b	c	$c=f(a+b+c)$
~~0~~1	1	$1=f(2+5)$
~~0~~3	7	$7=f(10+5)$
~~0~~7	3	$3=f(15)$
~~0~~9	9	$9=f(18+5)$
~~0~~3	1	$1=f(4+5)$
~~0~~1	3	$3=f(4+5)$
u 5	1	$1=f(11)$
~~0~~1	5	$5=f(11)$
~~0~~7	1	$1=f(8+5)$
~~0~~1	7	$7=f(8+5)$
~~0~~3	3	$3=f(11)$
~~0~~1	9	$9-f(15)$
~~0~~9	1	$9=f(15)$
3	9	
3	5	
5	3	
5	7	
5	5	

$b=f(ab+bc+ac)$

$5=f(5+5+25)$

При $a=5$, 551

неполный перебор

—

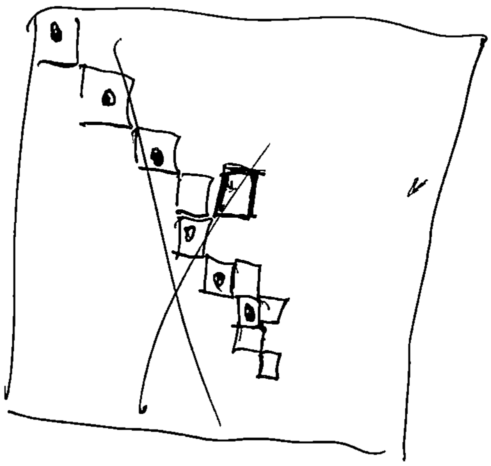
$a=6,7,8,9$?

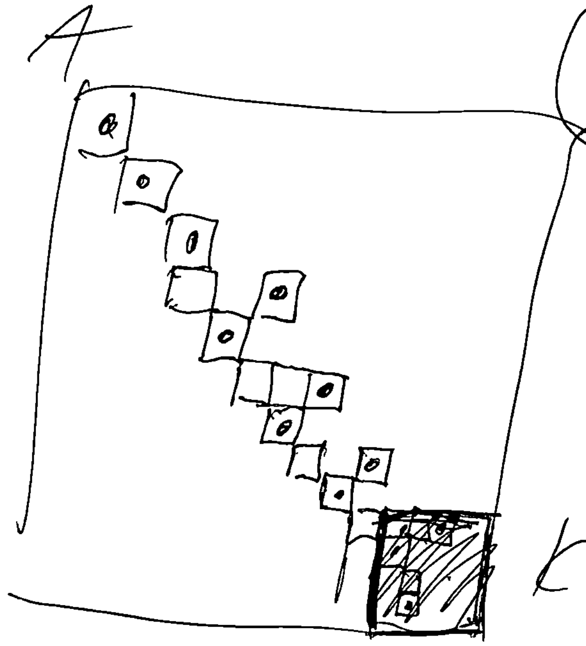
—

.

Стратегия 1

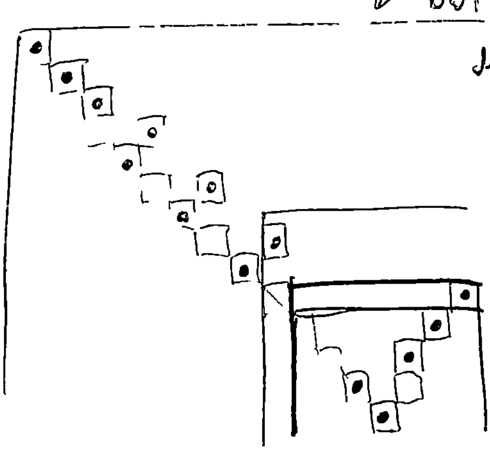
Доп лист №8





Будем двигаться от вершины A,
3 диаг, (~~..~~ вог) по бокам 3;
Остается еще квадрат (K); как это?
в котором заполнени по обр диагон
след потом (11)ей диагонали >,
возможно

вот так же
может оказаться



№5

Т.к. по усл ~~б~~ квадрата;

не могут лежать на 1 ~~диагонали~~ прямой

Пусть площадь квадрата $= n^2$

1 квадрат вычеркает площадь $k_1 = n + n - 1$

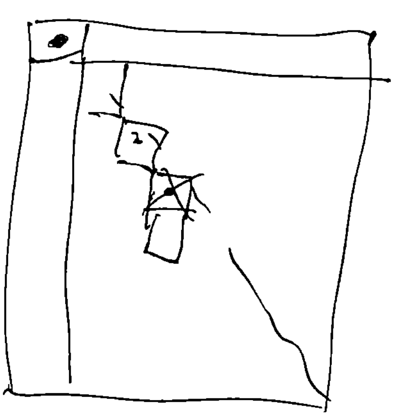
2 квадрат, поставленный на возможное место $k_2 = n - 1 + n - 2$

n квадрат вычеркает $k_n = n - n + 1 + n - n = 1$

$S_{k_i} = n + n - 1 + n - 1 + n - 2 + n - 2 + \ldots + 1$

$S_{k_1} = n + 2\left(\frac{n-1+1}{2}\, n-1\right) = n^2$

Но без учета диагоналей



$\longrightarrow$