ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101525325478

Титульный лист

Направление – ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия КРИВОЩЕКОВА

Имя ЕВГЕНИЯ

Отчество АНТОНОВНА

Дата рождения 10 04 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория Э503

Телефон +79002032203

Дата 03 02 2025 **Подпись** Кривощекова

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101525325478

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 13 01 до 13 05

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	20	0					
Балл члена жюри №2	20	20	0	20	0					

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№ 1

Без ограничения общности пусть число выглядит как $\overline{abc}$, тогда по условию нам дано что $a+b+c \equiv c \pmod{10}$

$\Downarrow$

$a+b = 0 \pmod{10}$ (т.к. $a<10$, $b<10$ и $c<10$)

$\Downarrow$

$a+b=10$

также $ab+bc+ca \equiv b \pmod{10}$

$ab + c(b+a) \equiv b \pmod{10}$

$ab + 10c \equiv b \pmod{10} \Longrightarrow ab \equiv b \pmod{10}$

$\Downarrow$

$b(10-b) - b = 0 \pmod{10}$

$10b - b^2 - b = 0 \pmod{10}$

$\cancel{b^2 - 9b = 0}$

$9b - b^2 \equiv 0 \to (9-b)b \equiv 0$

Давайте просто выпишем все остатки и узнаем для каких это выполняется

n	n^2	$9n$	$9n-n^2$	(mod 10)
0	0	0	0	Ура (Заметим, что $b \neq 0$, т.к. иначе $a=10$)
1	1	9	8	—
2	4	8	4	—
3	9	7	8	—
4	6	6	0	Ура
5	5	5	0	Ура
6	6	4	8	—
7	9	3	4	—
8	4	2	8	—
9	1	1	0	Ура

Получается что ($b=4$ и $a=6$) или ($b=5$ и $a=5$) или ($b=9$ и $a=1$)

Давайте для каждой пары вычислим c

$abc \equiv a \pmod{10}$

1) $24c \equiv 6 \pmod{10} \to 4c \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow c \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow c=4$ или $c=9$

2) $25c \equiv 5 \pmod{10} \to 5c \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow c=1$ или $c=3$ или $c=5$ или $c=7$ или $c=9$

3) $9c \equiv 1 \pmod{10} \to c=9$

Давайте проверим каждое получившееся число

№ 1 (продолжение)

1) $\overline{abc} = 644$

$a+b+c - 14$

$ab+bc+ca - 24+16+24 = 64$

$abc - 96$

Ура

2) $\overline{abc} = 649$

$a+b+c = 19$

$ab+bc+ca = 24+36+54 = 114$

$abc - 216$

Ура

3) $\overline{abc} = 551$

$a+b+c \quad 11$

$ab+bc+ca = 25+5+5 - 35$

$abc = 25$

Ура

4) $\overline{abc} = 553$

$a+b+c = 13$

$ab+bc+ca - 25+15+15 = 55$

$abc \quad 75$

Ура

5) $\overline{abc} = 555$

$a+b+c = 15$

$ab+bc+ca = 75$

$abc \quad 125$

Ура

6) $\overline{abc} = 557$

$a+b+c = 17$

$ab+bc+ca = 70+35 = 105$

$abc = 175$

Ура

7) $\overline{abc} = 559$

$a+b+c = 19$

$ab+bc+ca = 90+25 - 115$

$abc = 225$

Ура

8) $\overline{abc} = 199$

$a+b+c = 9+9+1 = 19$

$ab+bc+ca = 9+81+9 = 99$

$abc = 81$

Ура

Всё всех проверили, все подходят

Ответ 644, 649, 551, 553, 555, 557, 559, 199

+

№ 4

$$2^{xy} z = 2^{x+y}(x+y+z)$$

Заметим что если $x \geqslant 2$ и $y \geqslant 2 \Rightarrow xy \geqslant x+y$

т к

$x(y-1) \geqslant \underbrace{2(y-1) \geqslant y}$

ну это $2y-2 \geqslant y$

$y \geqslant 2$ (что и дано)

Давайте потом отдельно разберем случай $x < 2$ или $y < 2$

$$2^{xy} z - 2^{x+y}(x+y+z)$$

$$2^{xy-x-y} z - x+y+z$$

Итак ~~и~~ очевидно, что $2^{xy-x-y} z \quad z \Longrightarrow x+y+z \quad z \Longrightarrow x+y \quad z$

Давайте также отдельно разберем случай, когда

$xy < 2(x+y)$ т е $x < 4$ и $y < 4$

т к иначе ~~$xy \geqslant 4y$~~ $x(y-2) \geqslant \underbrace{4(y-2) \geqslant 2y}$

т к $y \geqslant 4$

тогда получается что $2^{xy-x-y} \geqslant 2^{x+y}$

а 2^{x+y} ~~z~~ $> x+y$

т.к ~~$2^0 > 0$ (по индукции~~

$2^{k+1} > k+1$

т к $2^k + 2^k > k+1$

$2^k > k$ и $2^k > 1$

(по индукции пусть для k доказано, а база ~~k=0~~ $2^0 > 0$)

Если $z > 1$

$2^{xy-x-y} z > x+y+z$

т к

$2^{xy-x-y} 2 \leq 2^{xy-x-y} z$

$\vee\!/$

$(x+y)+(x+y)$

$\vee\!/$

$(x+y+z)$

Т е мы доказали, что при $x \geqslant 4$ $y \geqslant 4$ и $z > 1$ решений нет ✓

№ 4 (продолжение)

Теперь предположим что $z = 1$ ($x \geq 4$ и $y \geq 4$ все еще

⇓

$2^{xy-\cancel{2x}} = 2^{x+y}(x+y+1)$

ну очевидно, что $x+y+1 = 2^k$ и $k < x+y$ т.к. $2^a = a+1$ только при

$2^a - a = 1$ только при $a = 0$

а $f(a) = 2^a - a$ — возрастает

ну и у нас $x+y \geq 8$

⇓

$2^{xy} = 2^{x+y+k}$, но,

у нас $xy \geq 2x+2y > x+y+k \Rightarrow$ решений нет

Так тогда будем перебирать чему равен x (только его т.к. уравнение симметрично относительно x и y)

ну тогда $\underline{x \leq y}$

V 1) $x = 1 \rightarrow 2^y z = 2^{y+1}(y+1+z)$

$z = 2(y+1+z)$ очевидно что левая часть всегда меньше правой при натуральных значениях y и z

V 2) $x = 2 \rightarrow 2^{2y} z = 2^{y+2}(y+2+z)$

$2^{y-2} z = y+2+z$

⇓

$z(2^{y-2} - 1) = y+2$

Заметим что $f(a) = 2^{a-2} - a - 3$ также монотонно возрастает

и при $a = 5$, $f(a) = 0 \Rightarrow y \leq 5$

(т.е. при $y > 5$ $z(2^{y-2}-1) > y+2$) при любом z

переберем все значения ←

1) $y = 2 \rightarrow z(1-1) = 4$

$0 = 4$ (решений нет)

2) $y = 3 \rightarrow \cancel{z(2-1)=4} \rightarrow \cancel{z=4}$ $2z = 5+z$ ⇓ $z = 5$

3) $y = 4 \rightarrow z(4-1) = 6 \rightarrow z = 2$

5) $y = 5 \rightarrow z(8-1) = 7 \rightarrow z = 1$

V 3) $x = 3$ ну при $y \geq 6$ $\cancel{xy \geq 5y}$ $xy \geq 2(x+y)$ и т.к. $y > 6$ (а этот случай мы уже рассмотрели)

$3y - 6 \geq 2y$

⇓

$x(y-2) \geq 2y$

следовательно можно перебирать y от 3 до 6

1) $y = 3 \rightarrow 2^{xy} = 2^9$

$2^{x+y} = 2^6$

$2^9 z = 2^6(6+z)$

$8z = 6+z$ (натуральных решений нет)

2) $y = 4 \rightarrow 2^{12} z = 2^7(7+z)$

$32z = 7+z$ (тоже нет нат. решений)

3) $y = 5 \rightarrow 2^{15} z = 2^8(8+z) \rightarrow 2^7 z = 8+z$ (тоже нет)

Ответ

$x = 2$, $y = 3$, $z = 5$

или

$x = 2$, $y = 4$, $z = 2$

или

$x = 2$, $y = 5$, $z = 1$

Бланк ответов

№2

Ответ Да, может

Пример

I тур:
$1 \leftrightarrow 3$
$2 \leftrightarrow 4$
$5 \leftrightarrow 7$
$6 \leftrightarrow 8$

II тур
$1 \leftrightarrow 4$
$2 \leftrightarrow 5$
$3 \leftrightarrow 8$
$6 \leftrightarrow 7$

III тур
$1 \leftrightarrow 7$
$2 \leftrightarrow 8$
$3 \leftrightarrow 5$
$4 \leftrightarrow 6$

IV тур
$1 \leftrightarrow 6$
$2 \leftrightarrow 7$
$3 \leftrightarrow 4$
$5 \leftrightarrow 8$

V тур
$1 \leftrightarrow 8$
$2 \leftrightarrow 6$
$3 \leftrightarrow 7$
$4 \leftrightarrow 5$

Каждый тур является корректным

А теперь посмотрим на тех поединки, которые еще могут произойти

4 может сразиться только с 7 и 8

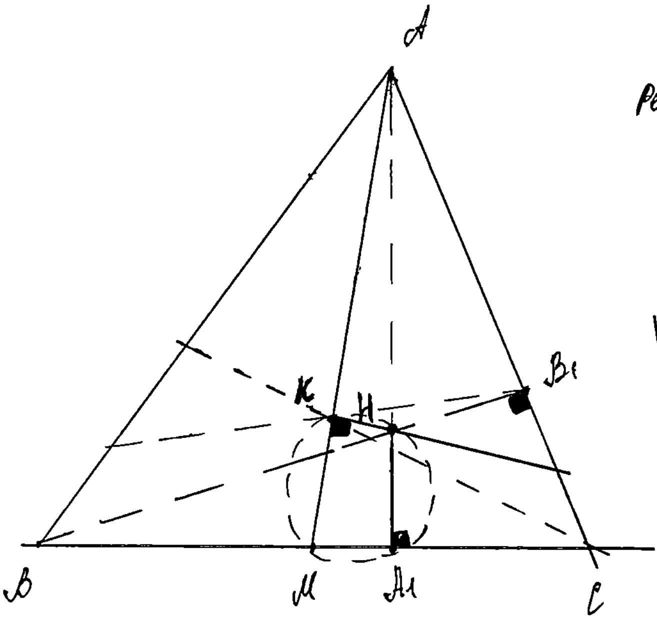
7 с 4 и 8

8 с 4 и 7 это значит, что какую бы пару мы не выбрали из них, ~~то~~ третий участник окажется без пары

ЧТД

+ 4

№3



Решение

1) ▫MLHA1 - вписанный

⇓

∠HKM - 90

продвижений нет

№4

~~Давайте раскрашиват~~

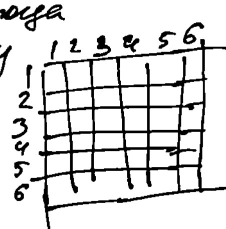
~~Давайте выберем верхний левый угловой квадратик он пусть будет (0 0)~~

~~ну и так их всех пронумеруем типа~~

~~но такой же логике~~

~~тогда давайте следующий квадратик будет с н~~

Давайте пронумеруем ~~касающ а сто~~ строки и столбцы и тогда будем обращаться к квадратику как к 2 координатам X, Y (т.е пересечение X-той строки и y-го столбца)



Пусть первый квадратик будет (1, 1)

тогда чтобы выбрать след будем к ~~X прибавлять 1~~ номеру ~~столбца~~ строки ~~вы~~ прибавлять 1, а к номеру столбца k·1, где k - номер квадратика, который мы сейчас выбираем

Заметим, что мы будем попадать на еще ~~повтор~~ не использ столбцы если $n = 2^p$

тогда давайте ~~разобьем~~ доск

И представим как сумму ~~сто~~ 2^p и каждый из квадратов выберем по р

ну и все

ч.т.д

n=6

не работает