



3101679958511

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия М О И С Е Е В

Имя Б О Г Д А Н

Отчество К О Н С Т А Н Т И Н О В И Ч

Дата рождения 2 7 0 9 2 0 0 7

Город участия К Р А С Н О Я Р С К

Аудитория 1 - 1 7

Телефон 8 9 0 8 0 2 6 0 5 1 9

Дата 0 3 0 2 2 0 2 5

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



3101679958511

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия К Р А С Н О Я Р С К

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	0	—	20	—	—					
Балл члена жюри №2	20	—	20	—	—					

Итоговый балл 30

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

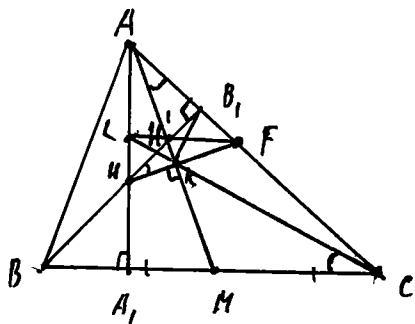
Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

-

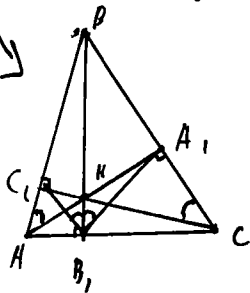
№ 3

противоположны



Т.к. сумма углов вписанного четырехугольника равна 180° ,
а $\angle H A_1 M = 90^\circ$, то $\angle H K M = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, тогда K — проекция
ортоцентра на медиану, т.е. K — точка Шварца треугольника
ABC (по определению) $\Rightarrow \angle C A M = \angle B C K$ (соответствия
точки Шварца через углы) Прямые СК до пересечения с AA,
 $\angle C A_1 A = \angle B C K$ Пусть $\angle C A M = \angle B C K = \alpha$,
 $\angle C A_1 A = 90^\circ - \alpha$ $\angle C A M = \beta$ $H B_1 \perp A K - H'$ (т.к. H' — пересечение

высот $\triangle A H F$, то H' — его ортоцентр) $\angle A H' B_1 = \beta$ Т.к. $\angle A B_1 H = \angle A K H = 90^\circ$, $\angle A B_1 K H$ — вписанный
чет $\Rightarrow \angle B_1 H K = \angle B_1 A K = \alpha \Rightarrow \angle H H' K = 90^\circ - \angle B_1 H K = 90^\circ - \alpha = \beta$ $\angle C A_1 A = \angle H H' K = \beta \Rightarrow H L H' K$ — вписанный чет $\Rightarrow \angle H_1 L K = \angle H' H K = \alpha$ Заметим, что $\angle H L H' = \alpha + \beta - 90^\circ \Rightarrow L H'$ — высота (т.к.
 H' — ортоцентр $\triangle A H F$) $\Rightarrow L, H', F$ лежат на одной прямой Воспользуемся утверждением о том, что
(высоты являются биссектрисами в ортоцентрическом треугольнике, тогда $\angle L K H' = \angle H' H K = \alpha \Rightarrow \angle L K H = \angle B_1 K F = \angle F K C$ (вертикальные) $\Rightarrow \angle B_1 K F = \angle F K C \Rightarrow K F$ — биссектриса угла $B_1 K C$, т.е. $H K$ — биссектриса
 $\angle C K B_1$, что и требовалось доказать



Пусть $\angle B A A_1 = \alpha$ Т.к. $\angle A C_1 K + \angle A B_1 K = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, $A C_1 H B_1$ — вписанный $\Rightarrow$
 $\alpha = \angle C_1 B_1 H$ Т.к. $\angle A C_1 C + \angle A A_1 C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, $A C_1 A_1 C$ — вписанный $\Rightarrow$
 $\alpha = \angle C_1 C A_1$ Т.к. $\angle K B_1 C + \angle K A_1 C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, $B_1 K A_1 C$ — вписанный $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle K C A_1 = \angle K B_1 A_1 = \alpha$ Тогда $\angle C_1 B_1 K = \angle A_1 B_1 K = \alpha$ и $B_1 B$ — биссектриса $\angle C_1 B_1 A_1$,
для углов $B_1 C_1 A_1$ и $C_1 A_1 B_1$ доказываем аналогично



N1

последняя

Из первого условия понятно, что первая цифра равна сумме всех цифр по модулю 10 Пусть x

- первая цифра, y, z - вторая и третья $x = x + y + z \pmod{10} \Rightarrow y + z \equiv 0 \pmod{10}$ Так $y, z \in [0, 9]$, то $y + z \in [0, 18] \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 10 \end{cases}$ Если $y + z = 0$, то $y = z = 0$ заметим, что все числа 100, 200, ..., 900

удовлетворяют условиям (Если первая цифра t , то $t = t + 0 + 0$, $0 = t + 0 + 0 + 0 + 0$, $0 = t + 0 + 0$) Тогда первый случай рассмотрен

~~Второе условие можно доказать так $y + z \equiv 0 \pmod{10}$~~

Из второго условия второе число равно ~~к~~ сумме попарных произведений трех цифр числа по модулю 10 Тогда всегда можно вынести второе число из двух слагаемых и получить, что второе число равно первому числу умноженному на сумму 2 его и 3 его плюс произведение 2 его и 3 его. Т.е., если обозначить за x первое число и применить условие, что сумма 2 его и 3 его равна 10,

$x \equiv x + 10 + yz$, т.е. $x \equiv yz \pmod{10}$ ~~Второе условие~~ Если z и 10 взаимнопросты

~~тогда $x \equiv yz \pmod{10}$~~ Из 3-его условия $xyz \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow xy \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow xy = 1$ то

Перекрестно не взаимнопросты, если $\text{НОД}(10, z) \neq 1$

~~тогда~~ Переберем все случаи с учетом ограничений на x и y Получаем, что $xy = 99$ или

$xy = 73$ ~~$xy = 99$ или $xy = 73$ или $xy = 1$~~ Так $y + z = 10$, надо про

верить числа 991, 737, 373

Проверка по второму условию: $9 \equiv 9 + 9 + 9 \pmod{10}$ $9 \equiv 9 + 9 + 8 \pmod{10}$ $9 \equiv 99 \checkmark$

$3 \equiv 7 + 3 + 7 \pmod{10}$ $3 \equiv 7 + 7 + 7 \pmod{10}$ $3 \equiv 99 \times$

$7 \equiv 3 + 7 + 3 \pmod{10}$ $7 \equiv 3 + 3 + 3 \pmod{10}$ $7 \equiv 59 \times$

Итого подходит число 991

Проверка по всем условиям $9 \equiv 9 + 9 + 9 \pmod{10}$ $9 \equiv 9 + 9 + 8 \pmod{10}$ $9 \equiv 99 \checkmark$

$9 \equiv 9 + 9 + 9 \pmod{10}$ $9 \equiv 99 \checkmark$

$9 \equiv 9 + 9 + 9 \pmod{10}$ $9 \equiv 89 \checkmark$

~~Ответ 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 991~~

Бланк ответов

Если z и 10 не взаимнопросты, то $z = 2$ или $z = 5$
 А $z = 4, 6, 8$?

1) Если $z = 2$, то $y = 10 - z = 8$ Так $xy \cdot z \equiv 2$, т.е. $z(xy - 1) \equiv 10$ и $z = 2$, $y = 8$, то

$8x - 1 \equiv 5$ Перебором устанавливаем, что $x = 2$, $x = 7$ подходит Проверим $282, 782$

Проверка $2 \equiv 8 + 2 + 2 \equiv 12 \pmod{10} \checkmark$

$7 \equiv 7 + 8 + 2 \pmod{10} \checkmark$

А где это $2 \equiv 5$ по модулю 5?

$8 \equiv 28 + 28 + 22 \equiv 36 \pmod{10} \times$

$8 \equiv 78 + 82 + 72 \equiv 86 \pmod{10} \times$

2) Если $z = 5$, $y = 10 - 5 - 5$ $z(xy - 1) \equiv 10 \Rightarrow 5x - 1 \equiv 2$ Подходит $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$, $x = 9$

Проверим $155, 355, 555, 755, 955$

Проверка 2-ого условия: $5 \equiv 51 + 51 + 55 \equiv 35 \pmod{10} \checkmark$

$5 \equiv 53 + 53 + 55 \equiv 55 \pmod{10} \checkmark$

$5 \equiv 75 + 75 + 55 \equiv 95 \pmod{10} \checkmark$

$5 \equiv 95 + 95 + 55 \equiv 115 \pmod{10} \checkmark$

существенных
превращений
нет

1-ое и 3-е условия можно не проверять, т.к. они равносильны $y + z \equiv 10$ и $z(xy - 1) \equiv 10$ (в наших случаях)

Ответ ~~100, 115, 200, 300, 355, 400, 500, 555, 600, 700, 755, 800, 900, 955, 997~~

* Последняя цифра числа его остаток по модулю 10

Решалась другая задача

