ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101350328871

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия ЛЕСНИКОВ

Имя ЮРИЙ

Отчество АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 05 07 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория Э507

Телефон 89088909940

Дата 03 02 2025 **Подпись** Лесн

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101350328871

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с

до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1 0	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	~~20~~	20	20	20	—					
Балл члена жюри №2	—	20	20	20	—					

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

№2

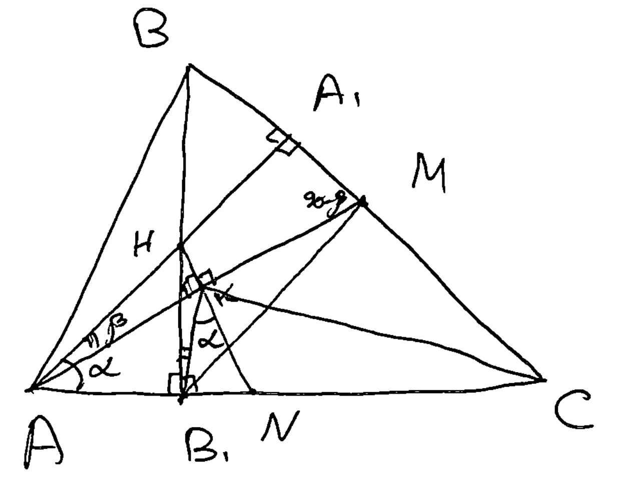
Ответ: может

Решение Пронумеруем шахматистов, каков с произвольно, от 1 до 8. Теперь графически изобразим игры во всех 5 турах (пара (i, j) обозначает игру i шахматиста с j) ✓

I тур	II тур	III тур	IV тур	V тур
(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)	(2, 4)
(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 4)	(3, 5)
(7, 8)	(4, 8)	(5, 4)	(5, 6)	(6, 7)

V

Видно, что к началу 6-го тура, первый, второй и третий шахматисты сыграли с каждым из оставшихся ровно по 1 разу, а значит в 6ом туре эти трое должны разбиться на две пары, ~~и~~ в каждой из которых нет шахматистов из множества {5, 4, 6, 7, 8}, что невозможно по принципу Дирихле. Этот пример доказывает, что так случится может



№3

Т.к. K лежит на опис окр ΔHA_1M, то HA_1MK — вписанный четырёхугольник $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle HA_1M + \angle HKM = 180°$ Т.к. AA_1 — высота, то $\angle HA_1M = 90° \Rightarrow \angle HKM = 90° \Rightarrow HK \perp AM$

Пусть $HK \cap AC = N$

~~Вспомним~~ Заметим, что $AHKB_1$ — вписанный $\Rightarrow \angle HAB_1 = \angle B_1KN$ Пусть $\angle HAB_1 = \alpha$ Также из вписанности $AHKB_1$ получим что $\angle HAK = \angle B_1K$ (пусть $\angle HAK = \beta$) Т.к ΔA_1AM — прямоуг, то $\angle A_1MA = 90° - \angle A_1AM = 90° - \beta \Rightarrow \angle AMC = 90° + \beta$ При этом $\angle KBN = 90° - \angle HB_1K = 90° - \beta$

см продолжение стр 2

Тогда $\angle KB_1N + \angle AMC = 90^\circ - \beta + 90^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow B_1KMC$ — вписанный

Заметим это и проведём B_1M. Т.к. M — середина BC, а $\triangle BB_1C$ — прямоугольный, то B_1M — медиана из прямого угла $BB_1C \Rightarrow$
$\Rightarrow BM = B_1M$ и $\triangle BMB_1$ — равнобедр. $\Rightarrow \angle BMB_1 = 180^\circ - (\angle MBB_1 + \angle BB_1M) =$
$= 180^\circ - 2\angle MBB_1$. Несложно видеть, что $\angle MBB_1 = \angle CBB_1 = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BMB_1 = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle B_1MC = 2\alpha$. Т.к. B_1KMC — вписанный, то
$\angle B_1MC = \angle B_1KC = 2\alpha$. При этом $\angle B_1KC = \angle B_1KN + \angle NKC = \alpha +$
$+ \angle NKC \Rightarrow \angle NKC = \alpha \Rightarrow \angle NKC = \angle B_1KN = \alpha$, что завершает доказательство

№4

$2^{xy} z = 2^{x+y}(x+y+z)$ Заметим, что если тройка (x_0, y_0, z_0) — решение, то тройка (y_0, x_0, z_0) — тоже решение. Тогда БОО $x \geq y$

$2^{xy} z = 2^{x+y}(x+y) + z\,2^{x+y}$, $z\,2^{xy} - z\,2^{x+y} = 2^{x+y}(x+y)$ Если $y=1$:

$2^x z - z\,2^{x+1} = 2^{x+1}(x+1) \,/\, 2^x > 0$, $z - 2z = 2x+2$, $2x+z+2=0$,

что невозможно. Далее $x \geq y \geq 2$. Тогда $xy \geq x+y$, т.к. $(x-1)(y-1) \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z\,2^{x+y}(2^{xy-x-y}-1) = 2^{x+y}(x+y) \,/\, 2^{x+y} > 0$ $z(2^{xy-x-y}-1) = x+y$

~~Если $y=2$ Если $x=y=2 \Rightarrow 4=0$ что~~ Тогда ~~$2^{xy-x-y} \geq 1$~~

$2^{xy-x-y} > 1 \Rightarrow xy-x-y > 0$, $(x-1)(y-1) > 1 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{x+y}{2^{xy-x-y}-1}$ Т.к. $z \in \mathbb{N}$, то необходимо выполнение

$x+y \geq 2^{xy-x-y}-1$. По нер-ву Бернулли

$2^{xy-x-y} - 1 = (1+1)^{xy-x-y} - 1 \geq 1 + 1(xy-x-y) - 1 = xy-x-y$ Тогда

$x+y \geq xy-x-y$, $xy - 2x - 2y + 4 \leq 4$, $(x-2)(y-2) \leq 4$ Продолжение на след. листе

(*) $(x-2)(y-2) \le 4$

1) Если $y=2$ нер-во (*) верно и: $2^{2x} z = 2^{x+2}(x+z+2)$

т.к. $x \geq 3$, то $2x > x+2 \Rightarrow 2^{x-2} z = x+z+2$, $z = \dfrac{x+2}{2^{x-2}-1}$

Рассмотрим $f(x) = 2^{x-2} - x - 3$ $f'(x) = \ln 2 \, 2^{x-2} - 1 \Rightarrow$ при $x \geq 4$ f возрастает, При этом $f(6) > 0 \Rightarrow x \le 5$ Если $x = 3$ $z = 5 \Rightarrow (3,2,5)$ – решение Если $x = 4$ $z = 2$ и $(4,2,2)$ – решение Если $x = 5$ $z = 1$ и $(5,2,1)$ – решение 2) Если $y = 3$ из нер-ва (*) $x \le 6$ и $z = \dfrac{x+3}{2^{2x-3}-1}$, Если $x = 3$ $z = \dfrac{6}{7} \notin \mathbb{N}$ Если $x = 4$ $z = \dfrac{7}{31} \notin \mathbb{N}$ Если $x = 5$ $z \notin \mathbb{N}$ Если $x = 6$ $z \notin \mathbb{Z}$ В этом случае решений нет 3) Если $y = 4$ $z = \dfrac{x+4}{2^{3x-4}-1}$ и $x \le 4$ Если $x = 3$ $z = \dfrac{7}{31} \notin \mathbb{N}$. Если $x = 4$ $z \notin \mathbb{N}$ В этом случае нет решений 4) Если $y = 5$ $z = \dfrac{x+5}{2^{4x-5}-1}$ и $x \le 3$ Если $x = 3$ $z \notin \mathbb{N}$ и в этом случае нет решений. 5) Если $y = 6$, $z = \dfrac{x+6}{2^{5x-6}-1}$ и $x \le 3$ Если $x = 3$ $z \notin \mathbb{N}$ и здесь тоже нет реш. 6) Если $y \geq 7$: $(x-2)(y-2) \geq 5$ и $z \notin \mathbb{N}$, т.к. (*) не выполняется

Ответ $(3,2,5)$, $(4,2,2)$, $(6\ 2,1)$, $(2,3,5)$, $(2,4,2)$, $(2,5,1)$

V V V V V V

+