ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026654137727

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия БОРНОВОЛОКОВ

Имя ИЛЬЯ

Отчество ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 23 01 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория Х405

Дата 02 02 2026 **Подпись** Борн

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026654137727

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Заполняется организаторами

Количество доп листов ☐☐ Количество черновиков к проверке ☐☐

Время выхода с ☐☐ ☐☐ до ☐☐ ☐☐

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	5	–	20					
Балл члена жюри №2	20	0	5	–	20					

Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

№1

~~Обозначим $f(ab) \in \{a, b\}$, где $a, b \in \{1, 9\}$~~

~~$f(ab) f(bc) f(ca) = abc$~~

$ab \in \{1, 2, 3 \quad 9\}$

$$F(a, b) = f(\overline{ab})$$

По условию

$$F(a, b) \in \{a, b\} \text{ для любых } a, b \ (0)$$

и любых $a, b, c \in \{1, 9\}$

$$F(a,b)\, F(b,c)\, F(c,a) = abc \ (1)$$

Требуется найти

$$S = \sum_{a=1}^{9} \sum_{b=1}^{9} F(a,b) \ (2)$$

$$\varepsilon(a,b) = \begin{cases} +1, \text{ если } F(a,b)=a \\ -1, \text{ если } F(a,b)=b \end{cases} \ (3)$$

Тогда

$$F(a,b) = \begin{cases} a, & \varepsilon(a,b) = +1 \\ b, & \varepsilon(a,b) = -1 \end{cases} \ (4)$$

Лемма a, b, c — попарно различны, то выполняется

~~$F(a,b)$~~

(5) $F(a,b)=a$, $F(b,c)=b$, $F(c,a)=c$, либо

(6) $F(a,b)=b$, $F(b,c)=c$, $F(c,a)=a$

Доказательство

~~$F(a \neq b) = a \quad F(b, c) =$~~

$F(a, b) \in \{a, b\}$

$F(b, c) \in \{b, c\}$

$F(c, a) \in \{c, a\}$

Произведение равно abc, то a, b, c должна встретится по одному разу

если $F(a, b)$ выбран a, то в $F(b, c)$ b, а в $F(c, a)$ c

Если $F(a, b)$ b, то $F(b, c)$ c, а $F(c, a)$ a.

Лемма доказана

Случай A, $F(1, 2) = 1$

Тогда $(1, 2, x)$, где $x \in \{1, 2\}$, (6) - невозможен

Так как $F(1, 2) = 2$ требуется

Значит нужен (5), то есть

$F(1, 2) = 1$ $F(2, x) = 2$, $F(x, 1) = x$

для всех $x \neq 2$ и очевидного из $F(2, x) = 2$

$F(2, 2) = 2$ получаем $F(2, b) = 2$ $\forall b$ (8)

Теперь возьмем любые a, b и подставим 1 в тройку $(a, 2, b)$

$F(a, 2) F(b, a) F(2, b) = a\,2\,b$

По (8) $F(2, b) = 2$, значит $F(a, 2) F(b, a) = ab$ (10)

Но $F(a, 2) \in \{a, 2\}$ Если $a \neq 2$, то $F(a, 2) = 2$ невозможно.

$F(b, a) = b$

$F(a, 2) = a$ $\forall a, b$ (12)

$F(a, b) = a$ $\forall a, b$ (13)

Случай B $F(1, 2) = 2$

$F(a, b) = b$ $\forall a, b$

Линия отреза

Если $F(a,b)=a$, то

$$S=\sum_{a=1}^{9}\sum_{b=1}^{9} a=\sum_{a=1}^{9} 9a=9(1+2+\ +9)=9\ 45=$$

$$=405$$

Если $F(a,b)=b$, то

$$S=\sum_{a=1}^{9}\sum_{b=1}^{9} 9b=9\ 45=405$$ +

Ответ 405

№2

Рассм централ симм поле 2025×2025

Единств фикси клетка — централ

может

Змейка из 8 клеток не может содержать централ клетку

Второй игрок после каждого хода первого игрока строит централ-симм змейку

После ~~ходов~~ Максима занятые клетки образ симм множество Если первый игрок смог построить змейку по свободным клеткам, то ее симм копие свободна Пересечения быть не может, так как ~~это~~ дало бы центр клетку, что невозможно по лемме

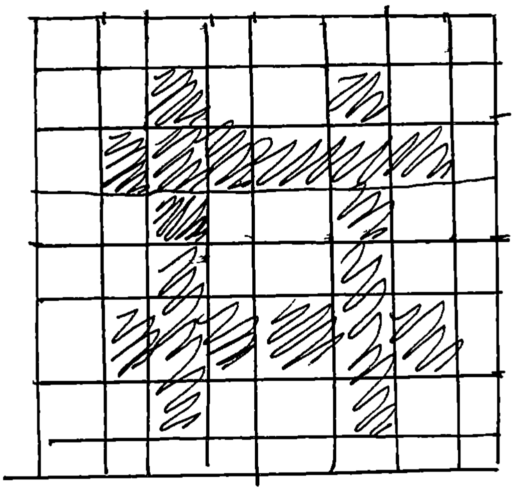
Итог всегда выигрывает Максим неверно

№3

1) Вырежем кресты с центрами в клетках $(3,3)$, $(3,6)$, $(6,3)$, $(6,6)$

2) Рассм любой возм центр нового креста (i,j):

$i, j \in \{2,3,4,5,6,7\}$



— пример

При любом другом количестве крестов (≤ 3) появится место для еще одного При любом другом расположении этих 4 крестов тоже появится количество клеток для еще одного креста Ответ 4

+

№5

Рассм $(k-2)x^2+(k-1)^2x+k=0$

$D=(k-1)^4-4(k-2)k=(k^2-2k-1)^2\geq 0$

Значит при $k\neq 2$ уравнение имеет два действ корне

$$x=\frac{-(k-1)^2\pm(k^2-2k-1)}{2(k-2)}$$

$$x_1=\frac{-(k-1)^2+(k^2-2k-1)}{2(k-2)}=\frac{-2}{2(k-2)}=-\frac{1}{k-2}$$

$$x_2=\frac{-(k-1)^2-(k^2-2k-1)}{2(k-2)}=\frac{-2k\cancel{(k-2)}}{2\cancel{(k-2)}}=-k$$ ✓

При $k \neq 2$

$x_1 = -\frac{1}{k-2}$ $\quad x_2 = -k$

~~В~~

Чтобы x_1, x_2 были ~~[illegible]~~ x_1 в A, ~~второй~~ x_2 в B

$x_1 > 0$

$x_2 > 0$

Если $x_2 = -k > 0$, то

$k < 0$

Тогда $k - 2 < -2$

$\frac{1}{k-2} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{k-2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \subset (0,1) \subset A$

То есть при любом $k < 0$ $x_1 \in A$

Условие $-k \in B$

$B = (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6)$

$-k \in (1,2)$ $\quad k \in (-2,-1)$

$-k \in (3,4)$ $\quad k \in (-4,-3)$

$-k \in (5,6)$ $\quad k \in (-6,-5)$

$k < 0$

$k \in (-6,-5) \cup (-4,-3) \cup (-2,-1)$

Ответ $k \in (-6;-5) \cup (-4,-3) \cup (-2;-1)$ +