ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101098335085

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия СВАЛОВ

Имя ВИКТОР

Отчество ЕВГЕНЬЕВИЧ

Дата рождения 05 04 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория МТ413

Дата 02 02 2026 **Подпись**

Пример заполнения
АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ
ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101098335085

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп листов 00 Количество черновиков к проверке 02

Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	~~20~~ 5	0	5	–	0					
Балл члена жюри №2	5	0	5	–	0					

Итоговый балл 10

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

№1

По условию $f(\overline{ab})\, f(\overline{bc})\, f(\overline{ca}) = abc$

Рассмотрим тройку (a, b, c) $f(\overline{ab})\, f(\overline{ba})\, f(\overline{aa}) = a^2 b$

$f(\overline{aa}) = a$ (других цифр в $\overline{aa}$ нет) $\Rightarrow f(\overline{ab})\, f(\overline{ba})\, a = a^2 b$

$f(\overline{ab})\, f(\overline{ba}) = ab$

$$\Downarrow \quad f$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} f(\overline{ab}) = a \\ f(\overline{ab}) = b \end{array}\right. \\ f(\overline{ab})\, f(\overline{ba}) = ab \end{array}\right. \Rightarrow f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) = \boxed{a+b}$$

(Условие $f(\overline{ab})\, f(\overline{ba})$ гарантирует, что цифры будут разными для $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$)

Тогда $f(11) + .. + f(19) + f(21) + \ + f(29) + \ + f(91) + \ + f(99)$ – просто сумма всех цифр, из которых состоит эти двузначные числа. неверно Заметим, что в этой сумме встречаются цифры от 1 до 9 (ноль исключен, как видно, из суммы), причем по 9 раз (9 раз для чисел, имеющих вид $\overline{aa}$ и 8 для $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$, поскольку таких чисел ~~[illegible]~~ $|[11, 99]| - |\{11, 22, \ 99\}| = 99 - 11 + 1 - 9 = 90 - 10 = 80 \Rightarrow$ 40 чисел вида $\overline{ab}$ и 40 вида $\overline{ba}$ для $\overline{ab}$ a или b ~~встретится~~ 4 раза, для $\overline{ba}$ аналогично

4) Тогда ответ $9 \sum_{k=1}^{9} k = 9\,(1 + 2 + \ + 9) = 9\, \frac{9\ 10}{2} = 9\ 9\ 5 = $

$= \boxed{405}$

+

Как это относится к итоговым подсчетам?

Ответ 405

$$\begin{array}{r} \times\ 81 \\ 5 \\ \hline 405 \end{array}$$

№2

Рассмотрим поле, которое нашли Дима и Максим. В нем 2025×2025 клеток, 2025 – нечетное число ⇒ у поля, которое было найдено, есть центр симметрии. Рассмотрим симметричную стратегию за Максима, отталкиваясь от ходов Димы. Для этого будем смотреть число клеточек, покрываемое одной змейкой. По условию, одна такая змейка занимает 8 клеток, отнимая 8 от всех имеющихся 2025^2 каждый ход. Заметим, что $\underline{2025 = 253\ 8 + 1}$, т.е. $\underline{2025 \underset{8}{\equiv} 1}$, а площадь каждой змейки – как раз 8, то есть при симметричной стратегии надо заметить такой же факт, но для 2025^2 действительно, $2025 \equiv_8 1 \Rightarrow 2025^2 \equiv_8 1^2 \mp [1^2 = 1] = \underline{2025^2 \underset{8}{\equiv} 1}$

А это в свою очередь означает, что после последнего возможного хода остается ровно 1 клеточка, которую нельзя будет покрыть. Игрок, попавший в эту ситуацию проиграл, а приведший в нее – выиграл. ~~Заметим, что последний ход~~ [illegible] ~~в силу того, что нечетные ходы (1, 3, 5 …) делает Дима,~~ [illegible] ⇒ Дима делает нечетные ходы, Максим – четные, а в силу того, что $2025^2 \equiv_8 1$ и $253^2 \underset{2}{\equiv} 1$ Максим своим последним ходом ставит змейку симметрично Диме относительно центра доски, тем самым, не оставляя 8 клеток для закраски со стороны Димы. Ответ: выигрывает Максим.

Линия отреза

№5

Рассмотрим приведенное в условии выражение как функцию $f\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, имеющую вид. не понятно как анализировать корни почему подс-а влает значения на концах отрезка?

$$f(x) = (k-2)x^2 + (k-1)^2x + k = 0$$

$f(0) = k$

$f(1) = (k-2)+(k-1)^2+k = k^2-1 = \underline{(k-1)(k+1)}$ $-1<k<0$ $+$

$f(2) = 4(k-2) + 2(k-1)^2+k = 2k^2+k-6$ $2k^2+k-6=0 \Rightarrow D = 1+4\ 2\ 6 = 49 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-1\pm7}{4} = -2, \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \underline{f(2) = (k+2)(2k-3)}$, $\frac{3}{2}\in(1,2)$, $-2<k<1,5$ $+$, $-1,5<k<-1$ $-$

$f(3) = 9(k-2) + 3(k-1)^2+k = 3k^2+4k-15$, $3k^2+4k-15=0 \Rightarrow D = 16+4\ 15\ 3 = 16^2 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-4+16}{6} = 3, \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \underline{f(3) = (k+3)(3k-5)}$, $\frac{5}{3}\in(1,2)$ $-3<k<-2$ $+$

$f(4) = 16(k-2) + 4(k-1)^2 + k = 4k^2+9k-28$, $4k^2+9k-28=0 \Rightarrow D = 23^2 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-9\pm23}{8} = -4, \frac{7}{4}$

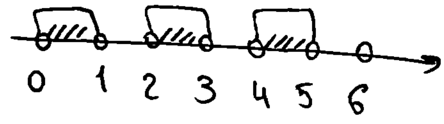
$\underline{f(4) = (k+4)(4k-7)}$, $\frac{7}{4}\in(1\ 2)$ $-4<k<-3$ $-$

$f(5) = 25(k-2) + 5(k-1)^2+k = 5k^2+16k-45$, Аналогично разложим $\underline{f(5) = (k+5)(5k-9)}$, $\frac{9}{5}\in(1,2)$ $-5<k<-4$ $+$

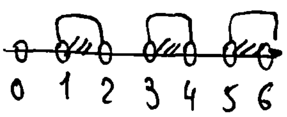
$f(6) = 36(k-2)+6(k-1)^2+k = 6k^2+25k-66$, Аналогично разложим $\underline{f(6) = (k+6)(6k-11)}$ $-6<k<-5$ $-$ $\frac{11}{6}\in(1,2)$

В разложениях видим скобки вида $(k+i)$, $i = \overline{1\ 6}$, теперь нанесем A и B на числовую прямую

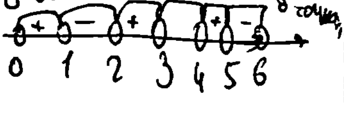
мн-во A



мн-во B



Заметим, что их объединение — интервал от 0 до 6 за искл 1,2,3,4,5 разбивается на 6 интервалов, чередующихся по порядку Заметим что в разложениях $f(i)$ один корень вида $-i$ — отрицательный, а второй — положительный Значит, расположение будет зависеть от корня вида $-i$, Отметим сходство с методом интервалов и отметим f для $k\in(-6\ 2)$ 8 точек, определив нужное разбиение на числовой прямой

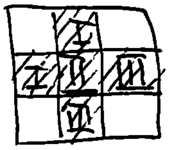


Прочередуем знаки $k+i$, ибо вторые корни точно лежат в A и B, так мы их разнесем $\underline{k\in(-6,-5)\cup(-4,-3)\cup(-2,-1)}$, тогда ровно половина из 6 интервалов пойдёт в одно из двух множеств, а другая половина — в оставшееся ввиду знакочередования $\Rightarrow$ разбиения по A и B аналогичны

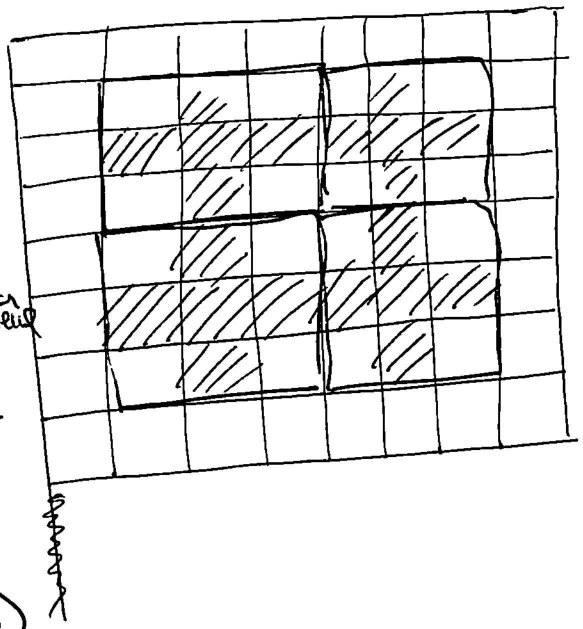
Ответ, $k\in(-6,-5)\cup(-4,-3)\cup(-2,-1)$

№3

Ясно, что фигурке для вырезания нужно 3 подряд идущие клетки по горизонтали и также по вертикали ⇒ чертеж



Тогда наша задача — максимально замостить поле 8×8 квадратами 3×3



Если отступить по горизонтали и вертикали на 1, в силу того, что 8>6 обстановка не изменится, → но не найдутся в них полос длиной 3 и их тоже пересечений а отступ сверху слева в виде не поместится в угловую клетку, но мы ограничим 8 4−4 = 28 клеток, останется 64−28 = 36, которые можно замостить 4 (4 9 = 36) квадратами 3×3, меньше 4 нельзя — можно будет вырезать крест ввиду того, что 36−9 ≥ 9, 36−18 ≥ 9, 36−27 ≥ 9 (9 1, 9 2, 9 3 соотв) ⇒ 4 квадрата 3×3, а значит и 4 креста в них. Приведём пример

Как мы видим, отступами ограничили нахождение горизонтальной и вертикальной полосы длиной 8 ≥ 3 клетки и имеющих общее пересечение, а оставшиеся замостили крестами, также ограничивая полосы по 3 ввиду расстояния между крайними точками соседних крестов, не превосходящих 2

Ответ: 4 Пример +
Оценка ++ —

Линия отреза

Бланк ответов