ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101397300030

Титульный лист

Направление
☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☑ 10 ☐ 11

Фамилия ТИМОЩЕНКО

Имя ЕГОР

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 19 01 2009

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 459

Дата 02 02 2026 **Подпись**

Пример заполнения
АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ
ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101397300030

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☑ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп листов 0 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	–	–					
Балл члена жюри №2	20	20	20	–	–					

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1 **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

~~N1~~

~~Пусть есть число $\overline{ab}$, $f(\overline{ab})=a$~~

~~Возьмем число $\overline{ab}$, пусть $f(\overline{ab})=a$~~

~~По условию $f(\overline{ab})\,f(\overline{bc})\,f(\overline{ca})-abc$~~

~~$f(\overline{bc})$ это $f(\overline{ca})$ это c или a~~

~~Т.к. произведение равно abc, $f(\overline{ab})=a$, $f(\overline{ca})=a$ или $f(\overline{ca})=c$,~~

~~$f(\overline{bc})=b$~~

~~Е.~~

~~N1~~

~~Возьмем натур. c~~ ~~Возьмем число $\overline{ab}$, пусть $f(\overline{ab})=a$~~

~~По условию $f(\overline{ab})\,f(\overline{bc}$~~

N1

~~a, b, c, d - цифры~~

Возьмем ~~число~~ $\overline{ab}$, ~~$a\in N$, $b\in N$~~ a и b - ненул цифры, пусть $f(\overline{ab})=a$

Возьмем c - ненул цифра ~~$c\in N$~~. По условию $f(\overline{ab})\,f(\overline{bc})\cdot f(\overline{ca})=abc$

$f(\overline{ca})$ это c или a

Если $f(\overline{ca})=a$, то $f(\overline{ab})\cdot f(\overline{ca})\,f(\overline{bc})=a^2 f(\overline{bc})=abc$

$a^2 f(\overline{bc})=abc$

$af(\overline{bc})=bc$

Если $f(\overline{bc})=b$, то $ab\neq bc$, если $f(\overline{bc})=c$, то $ac\neq bc$

Т.е. $f(\overline{ca})\neq a$, тогда $f(\overline{ca})=c$

~~Если~~ Тогда $f(\overline{ab})\,f(\overline{ca})\,f(\overline{bc})=ac\,f(\overline{bc})=abc\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\overline{bc})=b$

~~Т.е. для $a\in N$, $b\in N$, $c\in N$, если~~

~~Т.е. для~~ Т.е. если для ~~$a\in N$, $b\in N$~~ a и b - ненул цифр значение функции равно первой цифре двузначного числа, то для любого ~~$c\in N$~~ c ненул цифра значение функции для $\overline{ca}$ и $\overline{bc}$ будет равно первой цифре. Тогда вместо a и b мы сможем взять c и a, некоторое d ($d\in N$, d - цифра) и для него значение функ при $\overline{dc}$ и $\overline{ad}$ будет равно первой цифре

Т.е. если для $\overline{ab}$ значение функции равно первой цифре, то для $\overline{dc}$ тоже d и c - произвольные ненулевые цифры, т.е это будет верно для всех двузначных (у которых вторая цифра не ноль)

Если $f(\overline{ab})=b$, снова возьмем c (ненулевая цифра), $f(\overline{bc})=b$ или $f(\overline{bc})=c$, если $f(\overline{bc})=b$, то $b^2 f(\overline{ca})=abc$, $b\cdot f(\overline{ca})=ac$, противоречие, т.е. $f(\overline{bc})-c\Rightarrow f(\overline{ca})=a$

№1 продолжение

Проводим аналог рассуждения, как для $f(\overline{ab})=a$ и получаем, что если $f(\overline{ab})=b$, то для всех двузначных чисел (со второй ненулевой цифрой) значение функции будет равно ~~первой~~ второй цифре

Т.е значение функции для всех двуз чисел (со второй ненулевой цифрой) будет равно либо первой цифре, либо тоже для всех второй.

Спрашивают сумму всех двуз чисел со второй ненулевой цифрой

Если значение функции равно первой цифре, то у нас 9 чисел >10 и <20, 9 чисел ≥ 20 и <30 и т д, т.е $9\cdot1+9\cdot2+9\cdot3+9\cdot4+9\cdot5+9\cdot6+9\cdot7+9\cdot8+9\cdot9=$
$=9+18+27+36+45+54+63+72+81=90\cdot4+45=405$

Если значение функции равно второй цифре, то у нас 9 чисел оканчив на 1 (в каждой десятке по одной), 9 оканч на 2 и т д, т.е $9\cdot1+9\cdot2+9\cdot3+9\cdot4+9\cdot5+9\cdot6+9\cdot7+$ $+9\cdot8+9\cdot9=405$

Ответ $\underline{405}$

+

№2

Посчитаем варианты сумм соседних чисел

1 с 2 или 3, т е $1+2=\underline{3}$, $1+3=\underline{4}$

2 с 1 или 3, или 4, т е $1+2=\underline{3}$, $2+3=\underline{5}$, $2+4=\underline{6}$

3 с 1, 2, 4 или 5, т е $1+3=\underline{4}$, $2+3=\underline{5}$, $3+4=\underline{7}$, $3+5=\underline{8}$

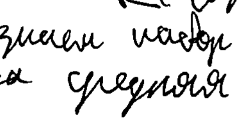
4 с 2, 3 или 5, т.е $2+4=\underline{6}$, $3+4=\underline{7}$, $4+5=\underline{9}$

5 с ~~3, 4 или~~ 3 или 4, т е $3+5=\underline{8}$, $4+5=\underline{9}$

В таблице

числа	сумма
12	3
23	5
24	6
34	7
35	8
45	9

Т.е сумма однозначно задаёт набор чисел



строим эти две суммы

Мы знаем набор чисел в первой (b и c), во второй (c и d), тогда средняя это c, тогда слева b, справа d

№2 продолжение

a b c d e
○ ○ ○ ○ ○

Осталось выяснить a и e

Разберем случаи (b, c, d известны)

1) $c=1$

1) Если $b=2$, то $d=3$, $a=4$, $e=5$ (c 2 не может быть 5) ✓

2) Если $b=3$, то $d=2$, $e=4$, $a=5$ ✓

2) $b=1$

1) Если $c=2$, $a=3$, $d=4$, $e=5$ ✓

2) Если $c=3$, $a=2$

1) Если $d=4$, $e=5$

2) Если $d=5$, $e=4$ ✓

3) $d=1$

1) Если $c=2$, $e=3$, $b=4$, $a=5$

2) Если $c=3$, $e=2$

1) Если $b=4$, $a=5$ ✓

2) Если $b=5$, $a=4$

4) Если $b\neq1$, $c\neq1$, $d\neq1$, то $a=1$ или $e=1$. Положение 1 будет определяться тем, где среди b и d есть 2 и 3 (если $b=2$ или 3, $d\neq2$ или 3, то $a=1$, e методом искл., если $d=2$ или 3, $b\neq2$ или 3, то $e=1$, a методом искл.)

Если $b=2$, $d=3$, то ~~a~~ $e=5$ (не рядом с 2), c известно, a методом искл.

Если $d=2$, $b=3$, то $a=5$, c известно, ~~a~~ e методом искл.

Т.е. b, c, d однозначно определяют a и e

Тогда нужно взять суммы втор и трет, трет и четв, способ определения показан выше (описан)

№3

~~Пусть есть некоторое~~

От противного Пусть есть некоторое K, что наименьшее из неприсутствующих в последовательности. Т.е с некоторого момента, в последовательности есть все числа меньше K. Если дальше попадётся некоторое $K+2n$ (той же чет, что и K), $n \in N$ то K наименьш из сост, $2K+2n$ ~~-2~~ кратно 2, $2K+2n \neq 2$ (т.к $K \geq 2$, 1 и 2 ~~2~~ уже в посл.) $\Rightarrow$ $2K+2n$ сост $\rightarrow$ придется дописать K. Т.е в последовательности не будет больше чисел (с некоторого момента) четности K, будут только $K+2n+1$ (другая четность, $n \in Z$, ~~n~~ $n \geq 0$). Но тогда найдется такое ~~2K~~ $K+2n+1$, что $2K+2n+1$ кратно 3 (если k ост при дел на 3 ~~ост~~ это 0, то у n ост 1, если у k ост 1, то у n ~~ост~~ это 0, если у K ~~эт~~ ост 2, то у n это 2). Тогда придётся написать K, значит, таких $K+2n+1$ не будет. Повторим для наименьшего из те рассуждения, аналогичные K (будем считать K попасться в последовательности не может), Значит, четность $K+2n+1$ тоже перестанет попадаться. Т.е не будет в последовательности (с некоторого момента) нат чисел обоих четностей, т.е ~~вообще~~ любых, что невозможно, противоречие. Значит такого K нет. Если нет минимального из непопавших в послед чисел, то нет и непопавших в послед чисел, что и требовалось доказать

+

по mod 3

K	n
0	1
1	0
2	2

$2\ 0+2\ 1+1=3$ кратно 3

$2\ 1+2\ 0+1=3$ кратно 3

$2\ 2+2\ 2+1=9$ кратно 3

Причем $2K+2n+1$ сост, т.к $K>2$ (послед из нат чисел, 1 и 2 уже были),

$2K+2n+1 \geq 4+2n+1=5+2n>3$

($2n \geq 0$)
$2n \in N$

Линия отреза

Бланк ответов