ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026419106405

# Титульный лист

**Направление**

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

**Класс** [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

**Фамилия** КУРАПОВА

**Имя** УЛЬЯНА

**Отчество** АЛЕКСЕЕВНА

**Дата рождения** 21 11 2008

**Город участия** ЧЕЛЯБИНСК

**Аудитория** 258

**Дата** 02 02 2026

**Подпись**

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026419106405

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление**
- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

**Класс** [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

**Город участия** Челябинск

## Заполняется организаторами

Количество доп листов [ ][ ] Количество черновиков к проверке [ ][ ]

Время выхода с 12 17 до 12 20

## Протокол проверки
## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 20 | 0 | 0 | – | 20 | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 20 | 0 | 0 | – | 20 | | | | | |

**Итоговый балл** 40

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

# Бланк ответов

15

$A = (0,1) \cup (2,3) \cup (4,5)$

$B = (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6)$

$(k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = 0$ 2 корня $x_1, x_2$ $x_1 \in A, x_2 \in B$

Пусть $x_1 > x_2$

$D = (k-1)^4 - 4k(k-2) = k^4 - 4k^3 + 2k^2 + 4k + 1$

Тк требуется 2 разл корня (если $x_1 = x_2$, то не может быть такого, что $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, тк $A \cap B = \varnothing$), то $D > 0$

$D'(k) = 4k^3 - 12k^2 + 4k + 4$

$D'(k) = 0$

$k^3 - 3k^2 + k + 1 = 0$

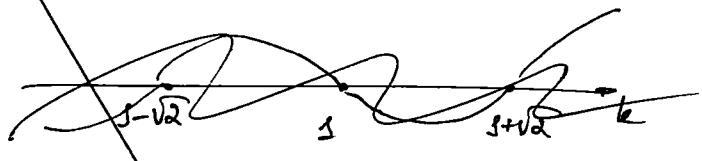
| | 1 | -3 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -2 | -1 | 0 |

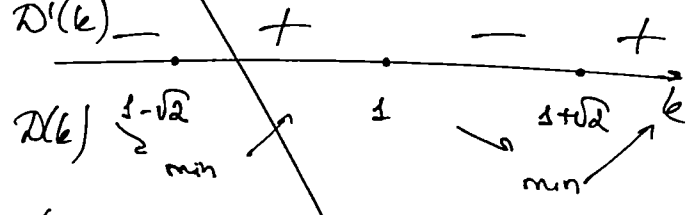
$k^2 - 2k - 1 = 0$

$D = 4 + 4 = 8$

$k = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$D'(k) = (k-1)(k-\sqrt{2}-1)(k-1+\sqrt{2})$




~~D(k)~~

наим знач либо в точке $k = 1-\sqrt{2}$, либо в точке $k = 1+\sqrt{2}$

$D_8(1-\sqrt{2}) = 17 - 12\sqrt{2} - 4(7 - 5\sqrt{2}) + 2(3 - 2\sqrt{2}) + 4(1 - \sqrt{2}) + 1 = 17 - 12\sqrt{2} - 28 + 20\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} + 4 - 4\sqrt{2} = -1$

1

$f(\overline{ab}) = a$ или $b$

$f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca}) = abc$

~~Все варианты~~

~~$f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca}) = abc$~~

~~$= aba$~~

~~$= acc$~~

~~$= aca$~~

~~$= bbc$~~

~~$= bba$~~

~~$= bcc$~~

~~$= bca$~~

~~Все~~

Т.е. $f(\overline{ab})\ f(\overline{ba})\ f(\overline{aa}) = aba$

$f(\overline{aa}) = a \Rightarrow f(\overline{ab})\ f(\overline{ba}) = ab$

$f(\overline{ab}) = a$ или $b$

Таким образом, $f(\overline{ab}) \neq f(\overline{ba})$ (одно равно a, другое b)

$\Rightarrow f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) = a + b$ +

$f(11) + f(12) + \ldots + f(19) + f(21) + \ldots + f(29) + \ldots + f(91) + \ldots + f(99) =$

$= f(11) + f(22) + f(33) + \ldots + f(99) + \big(f(12) + f(21)\big) + \big(f(13) + f(31)\big) + \ldots$

$+ \big(f(89) + f(98)\big) = (1 + \ldots + 9) + 3\ 3 + 4\ 1 + 5\ 2 + 6\ 2 + 7\ 3 + 8\ 3 + 9\ 4 +$

$+ 10\ 4 + 11\ 4 + 12\ 3 + 13\ 3 + 14\ 2 + 15\ 2 + 16\ 1 + 17\ 1 =$ 405

| a+b | a, b | кол-во |
|---|---|---|
| 3 | 12 | 1 |
| 4 | 13 | 1 |
| 5 | 14, 23 | 2 |
| 6 | 15, 24 | 2 |
| 7 | 16, 25, 34 | 3 |
| 8 | 17, 26, 35 | 3 |
| 9 | 18, 27, 36, 45 | 4 |
| 10 | 28, 37, 46, 19 | 4 |
| 11 | 29, 38, 47, 56 | 4 |
| 12 | 39, 48, 57 | 3 |
| 13 | 49, 58, 67 | 3 |
| 14 | 59, 68 | 2 |
| 15 | 78, 69 | 2 |
| 16 | 79 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 17 | 89 | 1 |

4

Введем ПДСК из точки A таким образом, что $C \in Ox$

$A(0,0)$

$C(a;0)$ $a$ – сторона $\Delta$

$B\left(\frac{1}{2}a; \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

$O$ – центр опис $O\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$ (сумма коорд точек ABC, делить на 3; точка пересеч медиан)

$R^2 = AO^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{36}a^2 = \frac{12}{36}a^2 = \frac{1}{3}a^2$

$R = AO = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

$\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 = \frac{1}{3}a^2$ – уравн окружности

$P(x_0, y_0)$

$\ell_1$ $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$

где $\{A,B\}$ – какой-то вектор нормали

$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$

$\ell_2$ $-B(x-x_0) + A(y-y_0) = 0$

$-Bx + Ay + (Bx_0 - Ay_0) = 0$

$Bx - Ay + (Ay_0 - Bx_0) = 0$

AB $\vec{e}_{AB} = \left\{\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right\}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}ax + \frac{-1}{2}ay = 0$

~~$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1}{2}y = 0$~~ $\sqrt{3}x - y = 0$

AC $\vec{e}_{AC} = \{a, 0\}$

$ax = 0$

$y = 0$

BC $\vec{e}_{BC} = \left\{\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right\}$

$\vec{n}_{BC} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a\right\}$

$\left(x - a\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}a + y\left(-\frac{1}{2}a\right) = 0$

$-\sqrt{3}(x-a) + y = 0$

$\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}a = 0$

$BC \cap \ell_1 = S$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y - \sqrt{3}a = 0 \\ Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0 \end{cases}$$

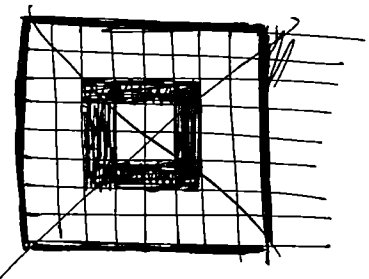
$$\begin{cases} y = \sqrt{3}(a - x) \\ Ax + B\sqrt{3}(a - x) - Ax_0 - By_0 = 0 \end{cases}$$

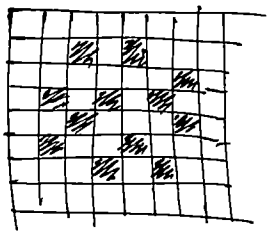
$$x(A - B\sqrt{3}) = Ax_0 + By_0 - B\sqrt{3}a$$

**3**

Ответ 12

Пример

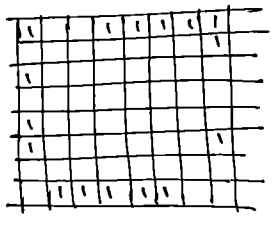




Решение

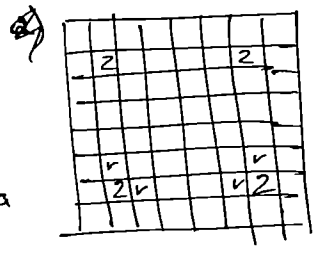
Чтобы было невозможно вырезать данную фигуру, не должно быть клеток с 4 соседями

Рассмотрим как это сделать наиболее всего



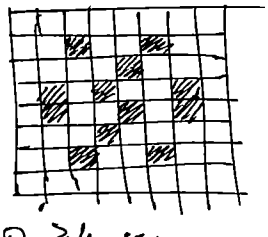
1) У клеток по контуру итак не может быть 4 соседей $\Rightarrow$ 28 клеток уже "обезврежено"

Остается $64 - 28 = 36$



2) Наиболее всего обезвреживать точки 2 с помощью одной из помеченных (V) клеток, так как другие соседи обезвредят только 1 новую клетку, а эти — 4 (считая их самих)

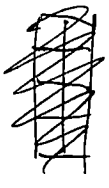
Выберем из каждой пары по 1ой



3) Во 2ом и 3ем столбцах удалим ср две клетки, т.к. они обезвредят наиб кол-во клеток (6)

Если бы выбрали в этих столбцах 3 и 6, то обезвредили бы 4 шт

Если 4 и 6 или 3 и 5, то также 4

4) 

Для обезвр оставшихся клеток нужно удалить $\geq 4$ кл $\Rightarrow$

т.к. в каждое удаление максимум по горизонтали забирает по 2 кл, а рядов 4

Линия отреза

# Бланк ответов

2

Макс возможное кол-во членов $= \left[\frac{2025}{8}\right] 2025 + \left[\frac{2025}{8}\right]$ 2025 mod 8 =

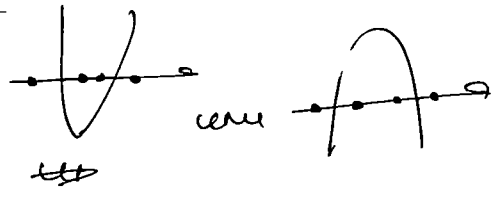
$= 253\ 2025 + 253\ 1 = 2026\ 253$

2026 253 2 ⇒ Максим

5

$(k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = 0$

$A \cap B = \varnothing$



$f(x) = (k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(0)\,f(1) < 0 \quad (1) \\ f(2)\,f(3) < 0 \quad (2) \\ f(4)\,f(5) < 0 \quad (3) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} f(1)\,f(2) < 0 \quad (4) \\ f(3)\,f(4) < 0 \quad (5) \\ f(5)\,f(6) < 0 \quad (6) \end{array}\right. \end{cases}$

$f(0) = k$

$f(1) = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ ✓

$f(2) = 2k^2 + k - 6 = (k-1{,}5)(k+2)$ ✓

$f(3) = 3k^2 + 4k - 15 = 3(k+3)\left(k - \frac{5}{3}\right)$ ✓

$f(4) = 4\left(k - \frac{8}{4}\right)(k+4)$ ✓

$f(5) = 5\left(k - \frac{9}{5}\right)(k+5)$ ✓

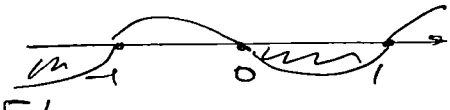
$f(6) = 6(k+6)\left(k - \frac{11}{6}\right)$ ✓

(1) $f(0)\,f(1) < 0$

$f(0) = k \quad f(1) = k - 2 + (k-1)^2 + k = k^2 - 1$

$k(k^2 - 1) < 0$

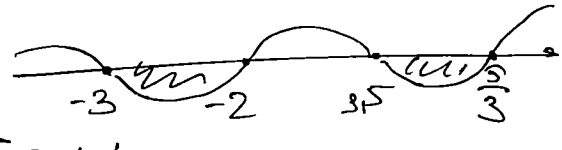
$k(k-1)(k+1) < 0$




$\left[\begin{array}{l} k < -1 \\ 0 < k < 1 \end{array}\right.$

(2) $f(2)\,f(3) < 0$

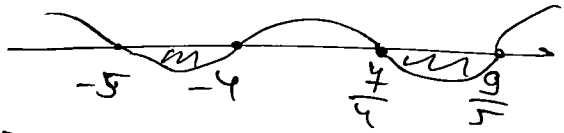
$2(k-1{,}5)(k+2)\ 3(k+3)\left(k - \frac{5}{3}\right) < 0$




$\left[\begin{array}{l} -3 < k < -2 \\ 1{,}5 < k < \frac{5}{3} \end{array}\right.$

(3) $f(4)\,f(5)<0$

$(k-\frac{7}{4})(k+4)(k-\frac{9}{5})(k+5)<0$




$\left[\begin{array}{l} -5<k<-4 \\ \frac{7}{4}<k<\frac{9}{5} \end{array}\right.$

(5) $f(3)\,f(4)<0$

$(k+3)(k+4)(k-\frac{35}{10})(k-\frac{9}{5})$

$\left[\begin{array}{l} -4<k<-3 \\ \frac{35}{10}<k<\frac{7}{4} \end{array}\right.$

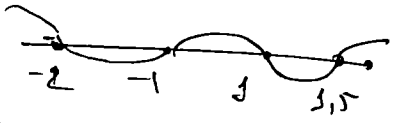
(6) $f(5)\,f(6)<0$

$(k+5)(k+6)(k-\frac{19}{5})(k-\frac{11}{6})<0$

$\left[\begin{array}{l} -6<k<-5 \\ \frac{19}{5}<k<\frac{11}{6} \end{array}\right.$

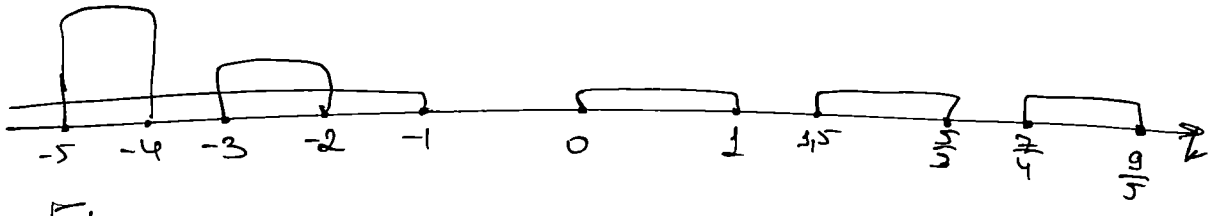
$f(1)\,f(2)<0$

(4) $(k-1)(k+1)(k-1{,}5)(k+2)<0$



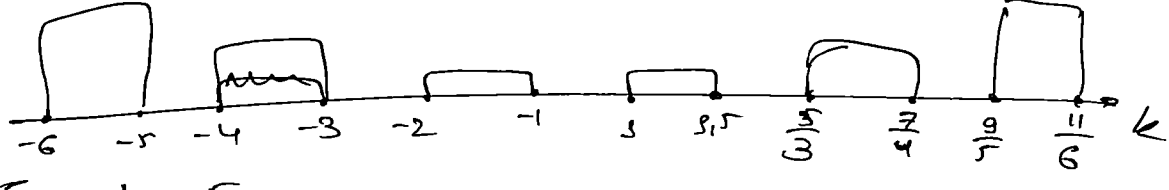

$\left[\begin{array}{l} -2<k<-1 \\ 1<k<1{,}5 \end{array}\right.$

Объединим (1), (2), (3)



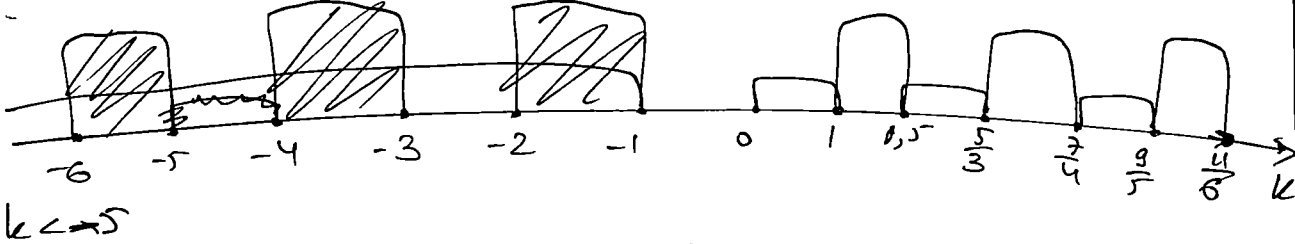

$\left[\begin{array}{l} k<-1 \\ 0<k<1 \\ 1{,}5<k<\frac{35}{10} \\ \frac{7}{4}<k<\frac{9}{5} \end{array}\right.$

Объединим (4), (5), (6)




$\left[\begin{array}{l} -6<k<-5 \\ -4<k<-3 \\ -2<k<-1 \\ 1<k<1{,}5 \\ \frac{35}{10}<k<\frac{7}{4} \\ \frac{9}{5}<k<\frac{11}{6} \end{array}\right.$

Общее решение:




$\left[\begin{array}{l} -6<k<-5 \\ -4<k<-3 \\ -2<k<-1 \end{array}\right.$

Ответ $(-6,-5)\cup(-4,-3)\cup(-2;-1)$