

## Проверочный лист

Заполняется участниками

**Направление**

анализ данных     информатика     история  
 математика     обществознание     русский язык  
 физика     химия

**Класс**

8     9     10     11

**Город участия**

Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

## Заполняется организаторами

Количество доп. листов     Количество черновиков к проверке

Время выхода с     до

## Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	8	20	-	-					
Балл члена жюри №2	0	8	20	0	0					

**Итоговый балл**

**Подпись члена жюри №1**

*Handwritten signature*

**Подпись члена жюри №2**

*Handwritten signature*

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф  
 Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



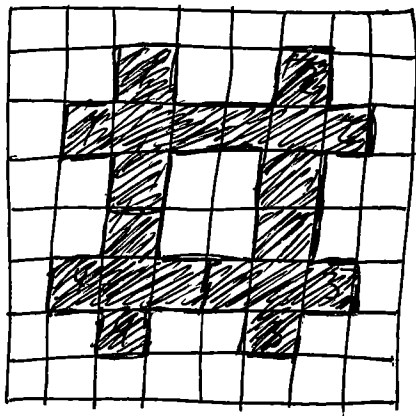
Линия отреза

Бланк ответов

N3

Ответ: 4

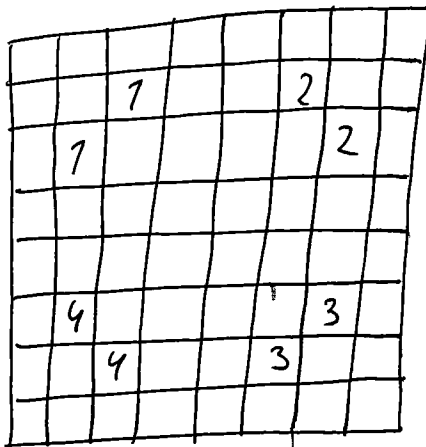
• Пример



• Оценка

① Раскрасим клетки

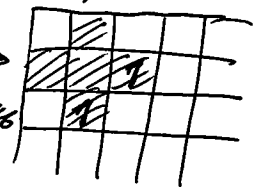
в цвета 1, 2, 3, 4 как показано на рисунке



② Заметим, что для того, чтобы из оставшейся части доски нельзя было вырезать крест, можно было бы одна клетка каждого цвета была вырезана, иначе, если обе клетки

(1, 2, 3, 4) → какой-то цвет не вырезан → из оставшейся части можно вырезать крест (например, если не покрыт цвет 1, то

можно вырезать из оставшейся части доски



③ Далее заметим, что один крест ~~то~~ можем покрыть как максимум один цвет клеток (т.к. длина креста равна 3 клетки, а расстояние от клетки одного цвета до клетки другого цвета равно как минимум 4 →



↓ ↓ (см продолжение на 3 странице) (нумерация страниц снизу листов)<sup>1</sup>

Т.С. Шранца

№1

$f \Rightarrow$  функция

$$f(\overline{ab}) = \begin{matrix} \nearrow a \\ \searrow b \end{matrix}$$

$$a, b, c \neq 0 \Rightarrow f(\overline{ab}) f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = abc$$

① Докажем, что  $f(\overline{ab}) + f(\overline{bc}) + f(\overline{ca}) = a + b + c$

• Пусть это неверно, тогда, ~~в каком-то из~~ ~~каких-то~~ в каких-то двух

числах выберем одну и ту же цифру, ~~что~~ ~~в каком~~ же учитывая однозначность числа одинаковую цифру выберем из  $f(\overline{ab})$  и  $f(\overline{bc})$ , тогда этой цифрой является  $b$ , но тогда заметим, что  $f(\overline{ab}) f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = b^2 c + abc$

$$\begin{matrix} \text{или} & (b \neq a) \\ b^2 a + abc & (b \neq c) \end{matrix}$$

• Тогда мы получим противоречие, так где бы ни был один ненулевой цифр верно

$$\sqrt{f(\overline{ab}) f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = abc}$$

② Рассмотрим некоторую сумму

$$S = f(11) + f(12) + f(13) + \dots + f(19) + f(21) + \dots + f(29) + \dots + f(91) + \dots + f(99) = f(11) + f(22) + \dots + f(99) + f(12) + f(13) + \dots + f(98)$$

$$S = S_1 + S_2$$

$S_1$

$S_2$

③ Сумма  $S_1$   $S_1 = f(11) + f(99) = 1 + \dots + 9 = 45$

(т.к. в этой сумме участвуют числа вида  $\overline{aa} \Rightarrow$  они однозначно дают цифру  $a$ )

④ Сумма  $S_2$

$$S_2 = f(12) + f(13) + \dots + f(19) + f(21) + f(23) + \dots + f(29) + \dots + f(91) + \dots + f(98)$$

(см. упрощение на 4 строки) 2 строки

N3 (продолжение)

④ Тогда мы найдем, что один крест можем покрыть максимум один цвет т.к. к цветов 4 штуки (1, 2, 3, 4), но нам понадобится хотя бы 4 креста, чтобы покрыть каждый из них  $\Rightarrow$  4 креста  $\rightarrow$  минимально надо вырезать (пример для 4 крестов в начале)

Ответ 4 креста. ⊕

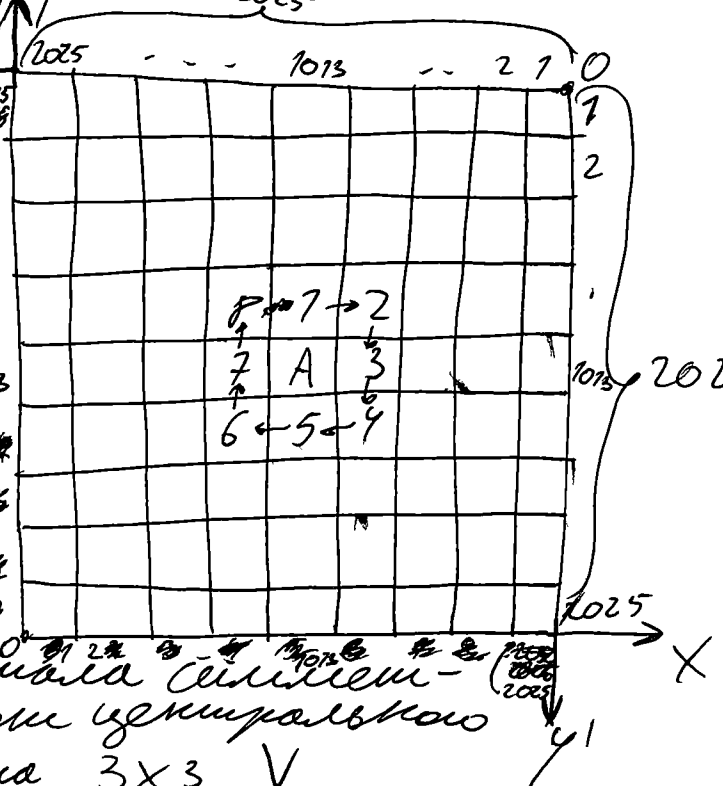
N2 Ответ: Дима:  
Решение

① Рассмотрим стратегию за Диму, которая позволяет ему выиграть при любой игре Максима:

② Рассмотрим доску  $2025 \times 2025$

③ Возьмем клетку  $X$  с коорд  $A(1013; 1013)$

это центральная клетка доски



④ Дима своим первым ходом рисует змейку, которая охватывает клетку A (длина ровно 8 клеток)

доска стала симметричной относительно центральной клетки  $3 \times 3$

3 страница

(см продолжение на 5 странице)

№7 (продолжение)  
 Полимашем сколько раз встречается  
 каждая цифра в аргументах у функций  
 в сумме  $S_2$

• Заметим, что каждая цифра встречается одинаковое кол-во раз, а именно 16

например цифра "1" встречается в следующих  
 $f$   $f(12); f(13), f(19), f(21), f(31), \dots, f(91)$   
 8 раз 8 раз

Итого 16 раз встречается "1"

• Далее заметим, что сумму  $S_2$  можно <sup>не очевидно,</sup>  
<sup>это также разделение существует</sup> разбить на крючки ~~где~~  $f$  такого вида:

$f(ab); f(bc), f(ca)$ , т.к. в каждой

такой крючке каждая цифра встречается 2  
 раза, а во ~~всех~~ <sup>всех</sup>  $f$ , как мы уже видели  
 каждая цифра встречается 16 раз, т.е. четное ко-  
 личество. А также т.к. всего  $f$  в сумме  $S_2 \rightarrow$   
 72 штуки, т.е.  $\frac{72}{3} = 24 \rightarrow 24$  крючка получимся

• Далее найдем, что сумма всех цифр равна:  
 $1 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 16 + \dots + 9 \cdot 16 = 16 + 32 + \dots + 144 = \frac{16 + 144}{2} \cdot 9 =$   
 $= 720$  (сумма всех цифр в аргументах  $f$ )  
 для суммы  $S_2$

• Далее заметим, что  $f(ab) + f(bc) + f(ca) = a + b + c$

сумма  $a + b + b + c + c + a =$  сумма  $a + b + c$   
 $= 2a + 2b + 2c$

• Тогда мы выясним, что сумма  $f(ab) + f(bc) + f(ca)$   
 в 2 раза меньше, чем сумма цифр в аргументах  $f$

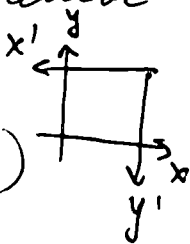
4 страница (см продолжение на 6  
 странице)

12 (продолжение)

5) Далее введем <sup>обычную</sup> систему координат  $(x, y)$  для доски, а также введем систему координат  $(x', y')$ , пусть ось  $x'$  в прямоугольном направлении оси  $x$  по верхней границе доски, а ось  $y'$  в прямоугольном направлении оси  $y$  по правой границе клетки (как показано на рисунке на ~~этом~~ предыдущем месте)

6) Тогда если Максим <sup>нарисовал</sup> ~~сделал~~ в этой ~~змейку~~ змейку ~~туда~~, она имеет координаты в обычной системе координат

$1(x_1, y_1), 2(x_2, y_2), \dots, 8(x_8, y_8)$



Клетки, в которых <sup>нарисовал</sup> Максим змейку

7) Тогда заметим, что у Димы всегда есть возможность <sup>нарисовать</sup> свою  $N$  змейку с координатами  $1(x_1, y_1), \dots, 8(x_8, y_8)$ , но, во второй системе координат  $(x', y')$  в каком случае клетки, в которых будем рисовать змейку Максим, и клетки, в которых будем рисовать ~~туда~~ змейку Дима никогда не будут пересекаться, т.к. всегда есть клетка во второй системе координат, которая симметрична клетке в обычной (см. продолжение на 6 странице) 3

5 страница

