ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101585143592

Титульный лист

Направление

- ☐ анализ данных
- ☐ информатика
- ☐ история
- ☒ математика
- ☐ обществознание
- ☐ русский язык
- ☐ физика
- ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ХОЛОДОВ

Имя АЛЕКСАНДР

Отчество АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 14 01 2009

Город участия КАЛИНИНГРАД

Аудитория 111

Дата 02 02 2026 **Подпись**

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101585143592

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Город участия КАЛИНИНГРАД

Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	–	5	–	3					
Балл члена жюри №2	20	0	5	0	3					

Итоговый балл 28

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

Задание №1

$f(\overline{ab})\, f(\overline{bc})\, f(\overline{ca}) = abc$

Найти значение суммы

$S = f(11) + f(19) + f(21) + \ldots + f(29) + \ldots + f(91) + \ldots + f(99)$

1 Т.к. по условию значение функции f от двузначного числа равно одной из цифр этого числа, сразу можно посчитать значения функций от двузначных чисел с одинаковыми цифрами

$f(11) + f(22) + f(33) + \ldots + f(99) = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$

2 Рассмотрим равенство $f(\overline{ab})\, f(\overline{bc})\, f(\overline{ca}) = abc$

Предположим, что $c = 1$; $a = 1$

$f(\overline{ab}) = \dfrac{ab}{f(\overline{b1})\, f(\overline{1a})}$

$\exists\, \overline{ab} = 12$

$f(12) = \dfrac{2}{f(21)\, f(11)} = \dfrac{2}{f(21)}$

$f(12)\, f(21) = 2$

т.к. $f(12)$ равно либо 1 либо 2 и $f(21)$ равно либо 1 либо 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(12) + f(21) = 1 + 2 = 3$ ✓

так работает для всех двузначных чисел у которых первая цифра 1

$f(13) + f(31) = 4$

$f(14) + f(41) = 5$

$f(15) + f(51) = 6$

$f(16) + f(61) = 7$

$f(17) + f(71) = 8$

$f(18) + f(81) = 9$

$f(19) + f(91) = 10$

Предположим, что $c = 2$, $a = 2$

$f(\overline{ab}) = \dfrac{2ab}{f(\overline{b2})\, f(\overline{2a})}$

$\exists\, \overline{ab} = 23$

$f(23) = \dfrac{2\,2\,3}{f(32)\, f(22)} = \dfrac{2\,3}{f(32)}$

$f(23)\, f(32) = 2\,3$, по тем же рассуждениям, что и в $c=1$,

$f(23) + f(32) = 5$

Продолжение задания №1

$f(23)+f(32)=2+3=5$

$f(24)+f(42)=2+4=6$

$f(25)+f(52)=7$

$f(26)+f(62)=8$

$f(27)+f(72)=9$

$f(28)+f(82)=10$

$f(29)+f(92)=11$

Аналогично доказываем, что при $a=n$, $c=n \Rightarrow a=c$

$\cancel{f(\overline{ab})}$ $f(\overline{nb})\ f(\overline{bn}) = nb \Rightarrow f(\overline{nb})+f(\overline{bn})=b+n$ ✓

Посчитаем все значения

$f(34)+f(43)=7$

$f(35)+f(53)=8$

$f(36)+f(63)=9$

$f(37)+f(73)=10$

$f(38)+f(83)=11$

$f(39)+f(93)=12$

$f(45)+f(54)=9$

$f(46)+f(64)=10$

$f(47)+f(74)=11$

$f(48)+f(84)=12$

$f(49)+f(94)=13$

$f(56)+f(65)=11$

$f(57)+f(75)=12$

$f(58)+f(85)=13$

$f(59)+f(95)=14$

$f(67)+f(76)=13$

$f(68)+f(86)=14$

$f(69)+f(96)=15$

$f(78)+f(87)=15$

$f(79)+f(97)=16$

$f(89)+f(98)=17$

$$S = 45+(4+5+6+7+8+9+\overset{+3}{10})+(5+6+7+8+9+10+11)+(7+8+9+10+11+12)+$$

$$+(9+10+11+12+13)+(11+12+13+14)+(13+14+15)+(15+16)+17=$$

$$=45+52+56+57+55+50+42+31+17=$$

$$=100+50\ \cancel{4}+255=405$$

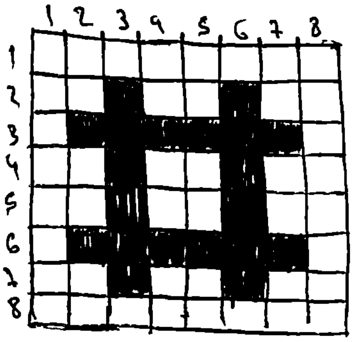
Ответ 405

+

Линия отреза

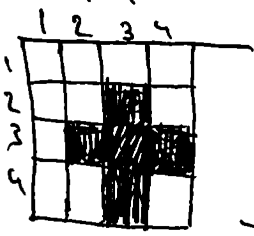
Бланк ответов

Задание №3



пример

1 Нам нужно разместить как можно меньше крестов на доске размером 8х8 Возьмем $\frac{1}{4}$ часть этой доски



неверно

Если рассматривать отдельно эту часть доски то на нее в любом случае поместится ~~квадрата~~ 1 крест, а у нас 4 таких части => 4 креста

2 Проверка получается ли разместить только 4 креста без возможности размещения пятого

3 Как показано на рисунке в начале решения, можно разместить только 4 креста

Ответ 4 креста

∓

Бланк ответов

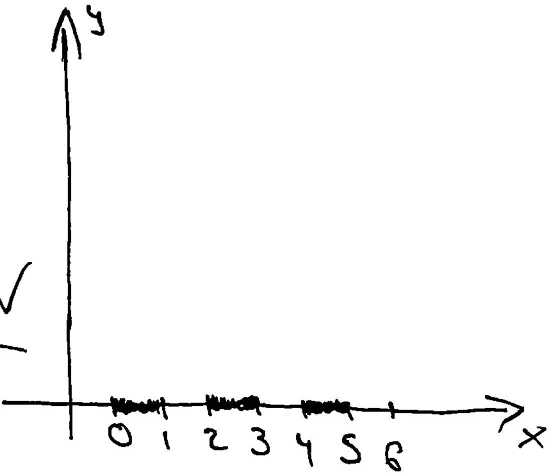
Задание №5

$A = (0,1) \cup (2,3) \cup (4,5)$

$B = (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6)$

$\left.\begin{matrix} x_1 \in A \\ x_2 \in B \end{matrix}\right\} (*)$

$(k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = 0$



$\left.\begin{matrix} x_1 \in A \\ x_2 \in B \end{matrix}\right| \Rightarrow x_0 > 0$

$x_0 = \dfrac{-(k-1)^2}{2(k-2)} > 0 \Rightarrow k-2 < 0 \Rightarrow \underline{k < 2}$ ✓

$(k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = 0$

$D = (k-1)^4 - 4k(k-2) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 8k =$

$= k^4 - 4k^3 + 2k^2 + 4k + 1 > 0 \mid k^2 > 0$; Пусть $k = 0$, $-2x^2 + x = 0$

$2x^2 - x = 0$

$\left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{matrix}\right.$ – не уд $(*)$ $\Rightarrow k \neq 0$ $(**)$

$k^2 - 4k + 2 + \dfrac{4}{k} + \dfrac{1}{k^2} > 0$

$\left(k^2 + \dfrac{1}{k^2}\right) - 4\left(k - \dfrac{1}{k}\right) + 2 > 0$

Пусть $k - \dfrac{1}{k} = t$, $k^2 + \dfrac{1}{k^2} - 2 = t^2$

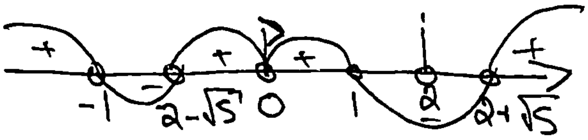
$t^2 - 2 - 4t + 2 > 0$

$t^2 - 4t > 0$

$t(t-4) > 0$

$\left(k - \dfrac{1}{k}\right)\left(k - \dfrac{1}{k} - 4\right) > 0$

$(k^2 - 1)(k^2 - 4k - 1) > 0$



$k \in (-\infty, -1) \cup (2-\sqrt{5}, 0) \cup (0, 1)$

$x = \dfrac{-(k-1)^2 \pm \sqrt{(k^2-4k-1)(k^2-1)}}{2(k-2)}$

Заметим, что множества A и B отличаются на 1, причем B больше A $\cancel{\Rightarrow |X_2 - X_1| = 1}$

дальнейших продвижений нет