ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026995010521

Титульный лист

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия БОРИСОВ

Имя АЛЕКСАНДР

Отчество СТАНИСЛАВОВИЧ

Дата рождения 16 11 2009

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 418

Дата 02 02 2026 **Подпись**

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026995010521

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [+] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс: [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [+] 11

Город участия: ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп листов [ ][ ] Количество черновиков к проверке [ ][ ]

Время выхода с [ ][ ] [ ][ ] до [ ][ ] [ ][ ]

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	–	20	–	0					
Балл члена жюри №2	20	–	20	–	10					

Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1

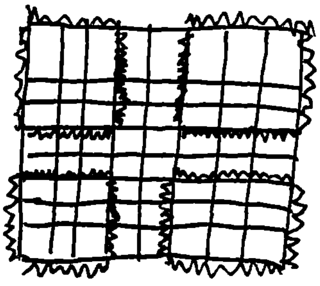
Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание (3)

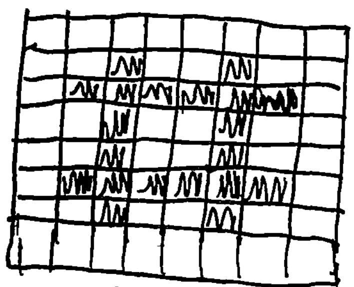


Рассмотрим угловые квадраты 3 на 3. Один пятиклеточный крест можно полностью поместить в один такой квадрат 3 на 3

Значит, чтобы нельзя было вырезать больше ни одного креста, эти квадраты 3 на 3 надо „занять", то есть отщепнуть от них часть так, чтобы туда нельзя было поместить крест. Нетрудно видеть, что один крест не может касаться сразу двух квадратов 3 на 3 (угловых, которые выделены), т.к длина креста 3 клетки, а расстояние от клетки одного квадрата до клетки другого (включительно) равна 4. Значит, чтобы зацепить все 4 квадрата необходимо минимум 4 креста

Оценка 4 креста

Пример



Ответ Наименьшее количество - 4 пятиклеточных креста

+

Бланк ответов

Задание 1

По условию $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bc})\, f(\overline{ca}) = abc$, для любых трех ненулевых цифр

Если $a = b \ne c$, тогда $f(\overline{aa})\, f(\overline{ac})\, f(\overline{ca}) = a^2 c$

По условию не трудно понять, что $f(\overline{aa}) = a$

Если $f(\overline{ac}) = a$ и $f(\overline{ca}) = a$, тогда $a^3 = a^2 c$, т.к цифры ненулевые
$a = c$, противоречие

Если $f(\overline{ac}) = c$ и $f(\overline{ca}) = c$, тогда $ac^2 = a^2 c$, т.к цифры ненулевые
$a = c$, противоречие

Значит $f(\overline{ac}) \ne f(\overline{ca})$

Если $f(\overline{ac}) = a$, то $f(\overline{ca}) = c$, значит $f(\overline{ac}) + f(\overline{ca}) = a + c$ ✓

Если $f(\overline{ac}) = c$, то $f(\overline{ca}) = a$, значит $f(\overline{ac}) + f(\overline{ca}) = a + c$

Итак, мы доказали, что для любых различных ненулевых цифр a и c
$f(\overline{ac}) + f(\overline{ca}) = a + c$

Пользуясь доказанным фактом, поймем что

$f(12)+f(21)=3$
$f(13)+f(31)=4$
$f(14)+f(41)=5$
$f(15)+f(51)=6$
$f(16)+f(61)=7$
$f(17)+f(71)=8$
$f(18)+f(81)=9$
$f(19)+f(91)=10$

$f(23)+f(32)=5$
$f(24)+f(42)=6$
$f(25)+f(52)=7$
$f(26)+f(62)=8$
$f(27)+f(72)=9$
$f(28)+f(82)=10$
$f(29)+f(92)=11$

$f(34)+f(43)=7$
$f(35)+f(53)=8$
$f(36)+f(63)=9$
$f(37)+f(73)=10$
$f(38)+f(83)=11$
$f(39)+f(93)=12$

$f(45)+f(54)=9$
$f(46)+f(64)=10$
$f(47)+f(74)=11$
$f(48)+f(84)=12$
$f(49)+f(94)\ 13$

$f(56)+f(65)=11$
$f(57)+f(75)=12$
$f(58)+f(85)=13$
$f(59)+f(95)=14$

$f(67)+f(76)=13$
$f(68)+f(86)=14$
$f(69)+f(96)=15$

$f(78)+f(87)=15$
$f(79)+f(97)=16$

$f(89)+f(98)=17$

Так же не забудем про $f(11)+f(22)+\ \ +f(99)=1+2+\ \ +9$

Бланк ответов

Продолжение задачи 1

$$f(11)+f(12)+\ \ +f(19)+f(21)+f(22)+\ \ +f(91)+\ \ +f(99)=$$

$$=3+4+5\ 2+6\ 2+7\ 3+8\ 3+9\ 4+10\ 4+11\ 4+12\ 3+13\ 3+14\ 2+15\ 2+16+17+$$

$$+1+2+3+4+5+6+7+8+9=(3+4+16+17)+2(5+6+14+15)+3(7+8+12+13)+4(9+11)+4\ 10+$$

$$+(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5=40+2\ 40+3\ 40+4\ 20+40+10+10+10+10+5=$$

$$=9\ 40+40+5=10\ 40+5=405$$

Ответ $f(11)+\ \ +f(19)+f(21)+\ \ +f(29)+\ \ +f(91)+\ \ +f(99)=405$ +

Задание 5 $(k-2)x^2+(k-1)^2x+k=0$, имеет два положительных корня, т.к. множества A и B не содержат отрицательных чисел и 0

$$0<x_{1,2}=\frac{-(k-1)^2\pm\sqrt{((k-1)^2)^2-4k(k-2)}}{2(k-2)}$$

$$0<x_1=\frac{-(k-1)^2-\sqrt{((k-1)^2)^2-4k(k-2)}}{2(k-2)}$$

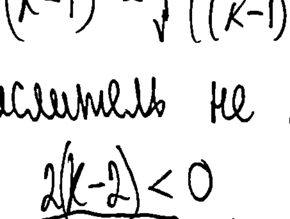
$$-(k-1)^2-\sqrt{((k-1)^2)^2-4k(k-2)}\ \cancel{<}\leqslant 0,\ \text{т.к.}\ -(k-1)^2\leqslant 0\ \text{и}\ -\sqrt{((k-1)^2)^2-4k(k-2)}\leqslant 0$$

Числитель не положительный, дробь положительна, значит знаменатель отрицателен

$$2(k-2)<0$$

$$\boxed{k<2}\ \checkmark$$

Далее поймём, что т.к. $(k-2)<0$, значит ветви параболы направлены вниз и корни лежат на интервале от $(0,6)$, для ~~этого~~



Вершина параболы выше Ox $\frac{-(k-1)^2}{2(k-2)}>0$ - верно, при ~~т.к~~ $k-2<0$, $-(k-1)^2<0$, $\underline{k<2}$ $\underline{k\neq 1}$

При x 0 и x 6, выражение меньше 0

$$(k-2)\,0+(k-1)^2\,0+k<0\qquad (k-2)\,6+(k-1)^2\,6+k<0$$

$$\boxed{k<0}\ \checkmark$$

Вывод такое возможно только при $k<0$, но ~~не~~ думаю не при всех $k<0$ это верно