ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026188045394

# Титульный лист

**Направление**

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

**Класс** [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

**Фамилия** АБДУЛЛИНА

**Имя** АНФИСА

**Отчество** РИНАТОВНА

**Дата рождения** 12 10 2008

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

**Аудитория** Э-404

**Дата** 02 02 2006 **Подпись** Ангф

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026188045394

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление**

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

**Класс** [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

## Заполняется организаторами

Количество доп листов 01 Количество черновиков к проверке – –

Время выхода с __ __ до __ __

## Протокол проверки

## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 20 | 0 | 5 | – | 0 | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 20 | 0 | 5 | – | 0 | | | | | |

**Итоговый балл** 25

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

## Бланк ответов

Задание 1

$f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca}) = abc$

$f(11)+\ldots+f(19)+f(21)+\ldots+f(29)+f(91)+\ldots+f(99)=?$

f(13) может быть равно 1 или 3

Обозначим $\overline{ab}$ – двузначное число

a – десятые

b – единицы

где a, b – принадлежат (1, 2, , 9)

По условию

1 $f(ab) \in \{a, b\}$

2 Для любых нулевых цифр a, b, c выполняется

$f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca}) = abc$

Введём обозначения

Для любых $a, b \in \{1, ., 9\}$

Введём индикатор

$S_{ab} = (1_0)$ если $(\overline{ab}) = a$

0, если $(\overline{ab}) = b$ , тогда

$f(ab) = a^{S_{ab}}\ b^{1} - S_{ab}$

Используем условия произведения

Подставим это выражение в равенство

$f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca}) = abc$

$a^{S_{ab}}\ b^{1} - S_{ab}\ b^{S_{bc}}\ c^{1-S_{bc}}\ a^{1-S_{ca}} = a^{1}\ b^{1} c^{1}$

Сравнивая показатели степеней при одинаковых основаниях

Получаем систему

$$\begin{cases} S_{ab} + 1 - S_{ca} = 1, \\ bc + 1 - S_{ab} = 1, \\ S_{ca} + 1 - S_{bc} = 1 \end{cases}$$

Из неё следует $S_{ab} = S_{bc} = S_{ca}$, т.к. a, b, c любые ненулевые цифры то из равенства $S_{ab}=S_{bc}$ следует, что для фиксированной цифры $b$ значени $S_{ab}$ не зависит $a$, а из равенства $S_{ab}=S_{ca}$ следует, что оно не зависит и от $b$

Следовательно, существует const, $c\in\{0,1\}$, такая что $S_{ab}=t$, для всех $a,b\in\{1,\dots,9\}$, отсюда возможны ровно два случая
$c=1$ $f(\overline{ab})=a$ для всех $a,b$
$t=0$, $f(\overline{ab})=b$, для всех $a,b$ ✓
Оба случая удовлетворяют условию задачи т.к. $a\,b\,c=abc$ и $b\,c\,a=abc$
Вычислим

Сумма значений $f(ab)$ по всем двузначным числам без нулей
т.е. по всем парам
$(a,b)$, где $a,b\in\{1,\dots,9\}$
Таких $9\cdot 9=81$
Случай 1 $f(ab)=a$
Каждая цифра $a$ встречается ровно при 9 значениях $b$ поэтому $\sum f(ab)=9(1+2+\dots+9)=9\cdot 45=405$
Случай 2

$f(\overline{ab})=b$

аналогично, каждая цифра $b$ встречается ровно при 9 зн $a$
Поэтому $\sum f(\overline{ab})=9(1+2+\dots+9)=405$
Ответ 405

+

Бланк ответов

Задание 2

Раскрасим поле в шахматном порядке черн и белый,
каждые две клетки имеющие общую сторону окрашены
в разные цвета

Св-ва шахматной раскраски:
Каждые две клетки имеющие общую сторону окрашены
в разные цвета

Св-ва змейки длины 8:
Змейка длиной 8 это связная по сторонам цепочка
из 8-ми клеток

Так как переход между соседними клетками всегда ме-
няет цвет, то в любой такой цепочке
число черных клеток равно ~~р~~ числу белых клеток
равно 4

Вывод: каждая змейка всегда занимает ровно
4ч и 4б клетки

Подсчитаем клетки каждого цвета:
Общее число клеток поля
$2025^2 = 4100625$

Т к 2025 не четное число, при шахматной раскраске
клеток одного цвета $= \frac{2025^2+1}{2}$,

клеток другого цвета $= \frac{2025^2-1}{2}$,

То есть количество клеток разных цветов различается
на 1

Инварианты игры.
Каждый ход уменьшает количество.
черных клеток на 4
• белых клеток на 4
Следовательно, разность между числом свободных черных
и белых клеток остается неизменной на протяжении
всей игры, Обозначим: $D = (\text{черные}) - (\text{белые})$, изначально,

$D = \pm 1$

Обозначим критерий невозможности хода для существования следующей змейки необходимо иметь как минимум 4 черных и 4 белых свободных клеток

Игра заканчивается тогда и только тогда, когда клетки одного из цветов заканчиваются раньше другого

Так как разность $D = \pm 1$ сохраняется при исчерпание клеток меньшего цвета всегда останется ровно одна лишняя клетка другого цвета, которую невозможно использовать ни в одной змейке

Четность числа ходов

Каждый ход уменьшает общее число свободных клеток на 8

Игра заканчивается, когда клетки меньшего цвета исчерпаны

Максимально возможное число змей

$$\left[\frac{\min(\text{черных}, \text{белых})}{4}\right]$$

т.к $\min(\text{черных}, \text{белых}) = \frac{2025^2-1}{2^3}$

получаем $\frac{2025^2-1}{8} = \frac{(2025-1)(2025+1)}{8} = \frac{2024 \cdot 2026}{8}$

Число $2024 \cdot 2026 \vdots 8$, следовательно общее число число ходов в четное

Определим победителя

1) Игра конечна

2) Число возможных ходов четно

почему они все возможны?

3) Начинает первый игрок Дима, следовательно, последний ход делает 2 игрок

Ответ: Максим выигрывает независимо от игры соперника
проигрывает тот, кто больше не может нарисовать змейку

Бланк ответов

Задание 5

$A = (0,1) \cup (2,3) \cup (4,5)$

$B = (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6)$

$(k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = 0$

$k$ – параметр, обозначим

$f(x) = (k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k$

Общее условие ур-е должно быть квадратным

1 $k - 2 \neq 0$

2 корни должны быть действительными и различными,

Следует из условия их принадлежности различным интервалам

3 Структура множеств $A$ и $B$

множество $A = (0,1) \cup (2,3) \cup (4,5)$,

$B = (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6)$

Разбиваю интервал $(0,6)$ на чередующиеся единичные промежутки

Так как у квадратного уравнения ровно 2 корня, то возможны только следующие варианты их расположения:

$\begin{cases} x_1 \in (0,1), \\ x_2 \in (1,2), \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 \in (2,3), \\ x_2 \in (3,4), \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 \in (4,5), \\ x_2 \in (5,6) \end{cases}$

и обязательно

В каждом случае корни лежат в соседних интервалах

Значения функции в целых точках

Вычислим $f(x)$, при целых $x$

$f(0) = k$ $\quad$ $f(3) = 3k^2 + 4k - 15$

$f(1) = k^2 - 1$ $\quad$ $f(4) = 4k^2 + 9k - 28$

$f(2) = 2k^2 + k - 6$ $\quad$ $f(5) = 5k^2 + 16k - 45$

Проверим возможные случаи

Случай 1

$x_1 \in (0, 1)$,

$x_2 \in (1, 2)$,

По теореме о промежуточных значениях:

$$\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(1) \cdot f(2) < 0 \end{cases}$$

То есть

$$\begin{cases} k(k^2-1) < 0 \\ (k^2-1)(2k^2+k-6) < 0 \end{cases}$$

$k \in (-2, 1)$

Рассмотрены не все случаи

Случай 2

$x_1 \in (2, 3)$,

$x_2 \in (3, 4)$

Необходимые условия

$$\begin{cases} f(2)\, f(3) < 0 \\ f(3)\, f(4) < 0 \end{cases} \quad \varnothing$$

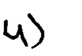
Случай 3 Необходимые условия

$x_1 \in (4, 5)$, $x_2 \in (5, 6)$ $\begin{cases} f(4)\, f(5) < 0 \\ f(5)\, f(6) < 0 \end{cases}$ $\varnothing$

—

Проверим выражение при $k=2$ ур-ие становится линейным, поэтому данный и иск и не попадает в найденный интервал

Ответ $k \in (-2, 1)$ при этих значениях параметра уравнение имеет 2 корня $x_1 \in A$, $x_2 \in B$

Задание 3  — фигура состоящая из центральной клетки и 4-х клеток, примыкающих к ней по стороне

1 Крест можно вырезать только тогда, когда существует клетки у которой все её соседние клетки по стороне также присутствуют, следовательно для каждой клетки если доски хотябы один из её четырёх соседей отсутствует, то ни одного креста вырезать не возможно

2 Раскрасим доску в шахматном порядке в черный и белый

св-ва шахматной раскраски у каждой клетки ~~есть~~ все 4 соседние клетки по стороне имеют противоположный цвет

3 Цветовая структура креста в любом пятиклеточном кресте:

• центральная клетка имеет один цвет

• все 4 окружающие клетки имеют противоположный цвет

следовательно каждый крест покрывает 1 кл одного цвета и 4 кл другого цвета

(продолжение на доп бланке)

[redacted] условии

[redacted] рим клетки одного цвета, например чёрные
[redacted] обы каждая была испорчена тогда для центра
[redacted] реста необходимо, чтобы хотя бы одна из четырех соседних белых клеток была удалена

То есть каждая черная клетка должна быть прикрыта хотя бы одной удалённой белой клеткой

Одна белая клетка может прекрыть не более четырех чёрных клеток

Следовательно если ~~всех~~ $W$ — число удалённых белых клеток, а всего черных клеток 32, то

$4W \geq 32$,

откуда:

$W \geq 8$

Аналогично, рассматривая белые клетки, получаем необходимость удаления как минимум 8 клеток

Свяжем это с кол-вом крестов

• каждый вырезанный крест удаляет 1 клетку одного цвета, и клетки другого цвета

Таким образом, любой набор крестов удаляет клетки обоих цветов

Минимально возможное общее число удалённых клеток: $8+8=16$

Т.к каждый крест содержит ровно 5 клеток (наличие клеток не означает, что они расположены в форме креста), следовательно

число крестов $N$ - удовлетворяет $5N \geq 16$,

$N \geq 4$

Покажем, что $N=4$ достижимо: Расположим 4 креста так, чтобы их центры находились в клетках: (3,3), (3,6), (6,3), (6,6), пример

Эти кресты 1 не пересекаются

2 удаляют клетки так, что у любой

Оставшийся клетки отсутствуют хотя бы
Следовательно ни одного нового креста
нельзя

Значит:
меньше 4 крестов не достаточно
• 4 крестов достаточно

Ответ 4 креста