ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026294097167

Титульный лист

Направление

- ☐ анализ данных
- ☐ информатика
- ☐ история
- ☒ математика
- ☐ обществознание
- ☐ русский язык
- ☐ физика
- ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия КОРНИЕНКО

Имя ЕЛИЗАВЕТА

Отчество ЮРЬЕВНА

Дата рождения 20 05 2008

Город участия УФА

Аудитория 9-501

Дата 02 02 2026 **Подпись** SKof

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026294097167

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс
- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Город участия УФА

Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	3	0	5	–	20					
Балл члена жюри №2	3	0	5	–	14					

Итоговый балл 25

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

Задание 1

Рассмотрим функцию $f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca}) = abc$

Зная, что значением может быть либо 1ое, либо 2ое число, ~~р~~ проследим за зависимостью

$f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca}) = a\ b\ c = abc$ (первая цифра)

$\Downarrow a \quad \Downarrow b \quad \Downarrow c$

$f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca}) = b\ c\ a = abc$ (второе цифра)

$\Downarrow b \quad \Downarrow c \quad \Downarrow a$

При выборе первой или второй цифры у одного из чисел остальные выбираются однозначно - обе тоже вторые или тоже первые. Значит, для всех двузн чисел в $f(b)$ может быть выбрано значение только первой или только второй цифры. Посчитаем искомую сумму в обоих случаях.

(1) первая цифра $\underbrace{(1+1+\ 1)}_{(1й\ десяток)\ 9\ шт} + \underbrace{(2+2+\ 2)}_{(2й\ десяток)\ 9\ шт} + \dots + \underbrace{(9+9\ +9)}_{(9й\ десяток)\ 9\ шт} = 9(1+2+3+\dots+9) = 9\cdot 45 = 405$

(2) вторая цифра $\underbrace{(1+2+3\ +9)+(1+2+\ 9)+\dots+(1+2\ +9)}_{9\ шт\ т.к.\ 9\ десятков} = 9\ (1+2+3\dots+9) = 9\cdot 45 = 405$

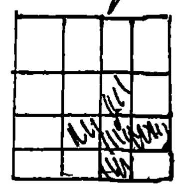
~~Вне зависимости~~ Во всех случаях сумма одинакова $\to$ $\underline{405}$

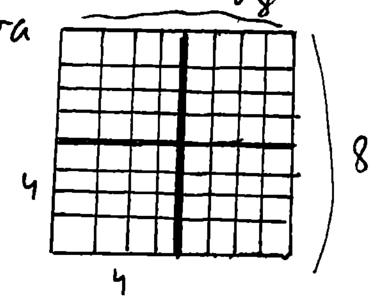
частный случай $\ominus$

Ответ 405

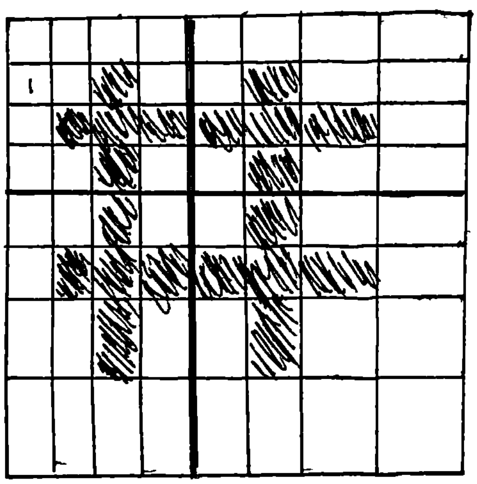
Задание 3

Оценка: разобьем доску на 4 симметричных квадрата 4×4, как показано на рисунке. В каждом квадрате 16 клеток, на ~~звезду~~ крест нужно 5 клеток → необходим хотя бы один крест (его можно поставить так, чтобы одного его было достаточно, как показано на рисунке). У нас 4 таких квадрата 4×4 на доске 8×8 → на доску нужно хотя бы 4 · 1 = 4 креста





Пример



Построение примера: как рассуждали ранее, разобьем ~~8×8~~ доску на квадраты 4×4, в каждом из них поставим по одному кресту ближе к центру.
В центре и по бокам образовываются квадраты 2×2, куда невозможно вставить крест

Ответ 4

верный пример без оценки

+

Задание 5

$A = (0;1) \cup (2,3) \cup (4,5)$

$B = (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6)$

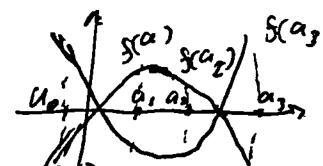
$(k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = 0$

2 корня x_1 и x_2, $x_1 \in A$, $x_2 \in B$

Рассчитаем дискриминант $D>0 \Rightarrow (k-1)^4 - 4k(k-2) > 0$

$k^4 - 4k^3 + 2k^2 \overset{+4k}{\cancel{-4k}} + 1 > 0$

График данной функции – парабола, где один корень попадает в один промежуток, другой в следующий



Рассмотрим нахождение x_1 и x_2 на отрезках из B относительно каждого отрезка из A (перебор) (пусть x_1 (меньший корень) в A и x_2 (больший корень) в B, затем аналогично для x_1 в B и x_2 в A)

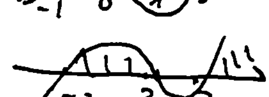
① $\overset{A}{(0,1)}$ и $\overset{B}{(1,2)}$

$$\begin{cases} (k-2)f(0) > 0 \\ (k-2)f(1) < 0 \end{cases} \text{ для } x_1 \qquad \begin{cases} (k-2)f(1) < 0 \\ (k-2)f(2) > 0 \end{cases} \text{ для B } x_2$$

$$\begin{cases} (k-2)k > 0 \\ (k-2)(k-2+k^2-2k+1+k) < 0 \\ (k-2)(4k-8+2k^2-4k+2+k) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k-2)k > 0 \\ (k-2)(k-1)(k+1) < 0 \\ (k-2)(2k^2+k-6) > 0 \end{cases}$$

$\to k < -1$



$\Rightarrow k \in (-2,-1)$

$D = 1 + 48 = 49 = 7^2$, $k = \frac{-1 \pm 7}{4} = -2, \frac{3}{2}$,

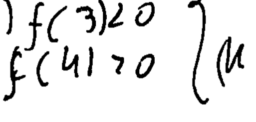
② $\overset{A}{(0;1)}$ и $\overset{B}{(3,4)}$

$$\begin{cases} (k-2)f(0) > 0 \\ (k-2)f(1) < 0 \\ (k-2)f(3) < 0 \\ (k-2)f(4) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k < -1 \\ (k-2)(9k-18+3k^2-6k+3+k) < 0 \\ (k-2)(16k-32+4k^2-8k+4+k) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k < -1 \\ (k-2)(3k^2+4k-15) < 0 \\ (k-2)(4k^2+9k-28) > 0 \end{cases}$$

$D_1 = 16 + 180 = 196 = 14^2$, $k = \frac{5}{3}, \cancel{\frac{7}{3}}$ -3

$D_2 = 81 + 448 = 529 = 23^2$

$k = -4, \frac{7}{4}$



$k \in \left(-4, -\frac{7}{3}\right)$

③ $\overset{A}{(0,1)}$ и $\overset{B}{(5,6)}$

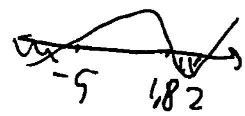
$$\begin{cases}(k-2)f(0)>0\\(k-2)f(1)<0\\(k-2)f(5)<0\\(k-2)f(6)>0\end{cases}\qquad\begin{cases}k<1\\(k-2)(25k-50+5k^2-10k+5+k)<0\\(k-2)(36k-72+6k^2-12k+6+k)>0\end{cases}$$

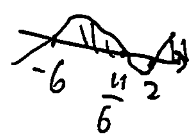
$$\begin{cases}k<1\\(k-2)(5k^2+16k-45)<0\\(k-2)(6k^2+25k-66)>0\end{cases}$$

$D_1=256+900=1156=34^2,\ k=-5,\ 1{,}8,$

$D_2=625+1584=47^2,\ k=-6,\ \frac{11}{6}$

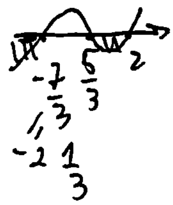
$k\in(-6,-5)$





④ $\overset{A}{(2,3)}$ и $\overset{B}{(3,4)}$

$$\begin{cases}(k-2)f(2)>0\\(k-2)f(3)<0\\(k-2)f(4)>0\end{cases}\qquad\begin{cases}(k-2)(2k^2+k-4)>0\\(k-2)(3k^2+4k-15)<0\\(k-2)f(4)>0\end{cases}$$



У условия т x_1 (из A)

нет пересечений (первые

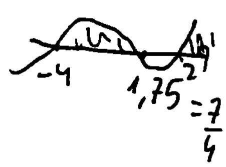
2 нер-ва) → ∅

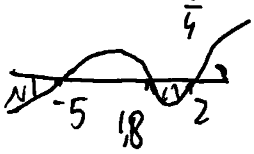
⑤ $\overset{A}{(2,3)}$ и $\overset{B}{(5;6)}$ → аналогично предыд пункту, т.к те же

условия на т x_1 из A в промежутке $(2,3)$ → ∅

⑥ $\overset{A}{(4,5)}$ и $\overset{B}{(5,6)}$

$$\begin{cases}(k-2)f(4)>0\\(k-2)f(5)<0\\(k-2)f(6)>0\end{cases}\qquad\begin{cases}(k-2)(4k^2+9k-28)>0\\(k-2)(5k^2+16k-45)<0\\(k-2)f(6)>0\end{cases}$$





Так же, как и в п4 и п5 нет пересечений у условий

точки x_1 из A ∅

Теперь аналогично рассмотрим нахождение меньшего

корня в B и большего корня в A

Достаточно рассмотреть условия на нахождение меньшего корня

в отрезках из B, и если там нет решений, то нет решений и

при ~~нет~~ переборе отрезков из A относительно данного отрезка из B

Линия отреза

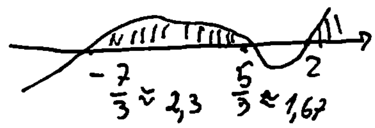
Бланк ответов

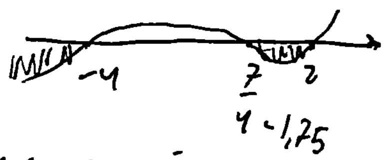
Р/им условия для (3;4) и (1, 2) (для (5, 6) смысла нет т.к. это самый большой отрезок → меньшего корня быть не может) Тогда

(7) (1, 2) $\begin{cases}(k-2)f(1)>0\\(k-2)f(2)<0\end{cases}$ $\begin{cases}(k-2)(k-1)(k+1)>0\\(k-2)(2k^2+4k-6)<0\end{cases}$

пересечений нет → ∅

(8) (3, 4) $\begin{cases}(k-2)f(3)>0\\(k-2)f(4)>0\end{cases}$ $\begin{cases}(k-2)(3k^2+4k-15)>0\\(k-2)(4k^2+9k-28)<0\end{cases}$





пересечений нет → ∅

Значит подходящие $k \in (-6,-5)\cup(4,-\frac{7}{3})\cup(-2;-1)$

Проверим условие дискриминанта: $D>0$

Все $k<0$ $\qquad k^4-4k^3+2k^2-4k+1>0$

Значит все найденные промежутки k подходят.

Т.к. $k<0$, то $-4k^3-4k \geq 0$

и $k^4+2k^2+1>0$ всегда →

→ $k^4-4k^3+2k^2-4k+1>0$

$D>0$

при всех подходящих k

Ответ $k\in(-6,-5)\cup(-4,-\frac{7}{3})\cup(-2,-1)$

+

Задача 2

Будем рассматривать стратегию мальчиков, опираясь на симметричные ходы. Т.к клеток - нечетное кол-во (2021), то одна центральная точка - центр симметрии.
Так, после хода Димы Максиму достаточно сделать такой же ход симметрично относительно центра - то есть пока может сходить Дима, сможет сходить и Максим. ~~Кроме того~~ В такой ситуации Максиму достаточно повторять ходы Димы, и он сможет выиграть, а нарушить это может первый ход ~~~~ Димы в центр симметрии. как именно? Если он его займет, то следующим ходом Максиму не удастся повторить ход Димы, и он сделает что-то другое, а уже тогда Дима сможет симметрично повторять за Максимом. Значит Дима победит
(т.е пока может сходить Максим, сможет и Дима)

стратегия не описана (—)

Ответ Дима