ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026294097867

Титульный лист

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Фамилия ШИПИЛОВ

Имя МИХАИЛ

Отчество АРТЕМОВИЧ

Дата рождения 18 09 2007

Город участия УФА

Аудитория 9-501

Дата 02 02 2026 **Подпись**

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026294097867

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс
- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Город участия УФА

Заполняется организаторами

Количество доп листов
Количество черновиков к проверке
Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	3	–	5	–	20					
Балл члена жюри №2	3	–	5	–	20					

Итоговый балл 28

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

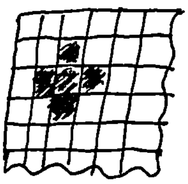
Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

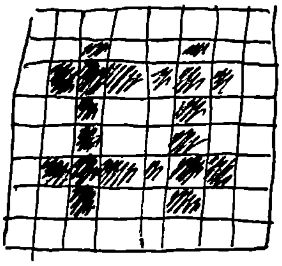
а если разместить части 2х крестов?

Бланк ответов

Задание 3



(Если сдвинуть этот крест вниз или вправо, то в левом верхнем углу можно разместить еще один таким образом разместить в каждом из углов по такому кресту



Как видим из рисунка, разместить еще креста не получится, а убрать ~~или сдвинуть~~ один из существующих без образования еще одного места для креста не получится. Таким образом, это ~~оптимальное~~ минимальное количество крестов

верный пример без оценки

Ответ 4

+

Задание 1

Для любого $a\ b\ c$

$f(\overline{ab})f(\overline{bc})f(\overline{ca}) = abc$

причем $f(\overline{ab}) \in \{a\ b\}$

Подставляем $a=b=c$

$f(\overline{aa})f(\overline{aa})f(\overline{aa}) = a^3 \Rightarrow f(\overline{aa}) = a$

Пусть для некоторых $a \neq b$

Тогда $f(\overline{ab})f(\overline{ba})f(\overline{aa}) = a^2 b \Rightarrow f(\overline{ba}) = a$

~~Пусть для некоторых $a \neq c$~~

~~Тогда $f(\overline{aa})f(\overline{ac})f(\overline{ac}) = a^2c$~~

Тогда для некоторых $a \neq b$ выполнено $f(\overline{ab}) = a$

Тогда для любого $c \neq a, b$

$a f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = abc \Rightarrow f(\overline{bc})f(\overline{ca}) = bc$

частный случай

−

Отсюда $f(\overline{bc}) = b$ и $f(\overline{ca}) = c$

Следовательно $f(\overline{xy}) = x$ при любых $x \neq y$

Аналогично, если существует $a \neq b$ такое, что $f(\overline{ab}) = b$, то для любых x, y имеем $f(x,y) = x$

Таким образом $\sum_{k=11}^{99} f(\overline{kk}) = \sum_{a=1}^{9}\sum_{b=1}^{9} a = \sum_{a=1}^{9} 9a = \frac{9(1+9)9}{2} = 9\cdot 45 = 405$

Ответ 405

Задача 5

При $k = 2$ получаем уравнение 1 степени, которое даст 1 корень, что не подходит

$D = (k-1)^4 - 4(k-2)k$

$(k-1)^4 = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1$

$4(k-2)k = 4k^2 - 8k$

$D = k^4 - 4k^3 + 2k^2 + 4k + 1$

по Виета

$x_1 + x_2 = -\frac{(k-1)^2}{k-2}$

$x_1 x_2 = \frac{k}{k-2}$

корни чередуются

$x_1 < x_2$

$x_1 \in A$	$x_2 \in B$
$(0, 1)$	$(1\ 2)$
$(2, 3)$	$(3\ 4)$
$(4, 5$	$(5\ 6)$

разность

$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{D}}{|k-2|}$

$0 < \frac{\sqrt{D}}{|k-2|} < 2$

Остается

$\frac{\sqrt{D}}{|k-2|} < 2 \Rightarrow D < 4(k-2)^2$

$k^4 - 4k^3 + 2k^2 + 4k + 1 < 4(k^2 - 4k + 4)$

$k^4 - 4k^3 - 14k^2 + 20k - 15 < 0$

Линия отреза

Бланк ответов

Задача 5

$A = (0,1) \cup (2,3) \cup (4,5)$

$B = (1,2) \cup (3,4) \cup (5\ 6$

$(k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = 0$

$x_1 \in A$, $x_2 \in B$

Если $k = 2$, то

$0x^2 + (1)^2 x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

При $k \neq 2$

$x = -k$

$(k-2)(-k)^2 + (k-1)^2(-k) + k = (k-2)k^2 - k(k-1)^2 + k$

$(k-2)k^2 - (k^3 - 2k^2 + k) + k = (k^3 - 2k^2) - k^3 + 2k^2 - k + k = 0$

Значит $x = -k$ ✓

Тогда многочлен делится на $(x+k)$

$(k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = (x+k)((k-2)x+1)$

$(x+k)((k-2)x+1) = (k-2)x^2 + x + k(k-2)x + k$

$x + k(k-2)x = x(1 + k^2 - 2k) = x(k^2 - 2k + 1) = x(k-1)^2$

Все сходится

Из разложения

$(x+k)((k-2)x+1) = 0$

При $k \neq 2$

$x_1 = -k \qquad x_2 = -\frac{1}{k-2} = \frac{1}{2-k}$ ✓

$x_1 = -k > 0$

$-k > 0 \Rightarrow \underline{k < 0}$ ✓

$x_2 = \frac{1}{2-k}$

Если $k < 0$, то $2-k > 2$, значит

$0 < \frac{1}{2-k} < \frac{1}{2}$ ✓

2

Те при $k<0$ второй корень всегда лежит в интервале $x_2 \in (0, \frac{1}{2}) \subset (0, 1) \subset A$ ✓

Итак, если $k<0$, ~~нулевой~~, то второй корень автоматически в A

при $k<0$

$x_2 \in A$ всегда

значит, чтобы второй корень оказался в B, нужно и достаточно

$x_1 = -k \in B$

Если $k \geq 0$, то $x_1 = -k \leq 0 \notin A, B$, а значит невозможно чтобы один корень был в A, другой в B при $k<0$ и условии

Следовательно, ищем решение только

$-k \in B$

Решаем $-k \in B$

$B = (1, 2) \cup (3, 4) \cup (5, 6)$

$-k \in (1, 2)$ или $-k \in (3, 4)$ или $-k \in (5, 6)$

Переходим к k

1 $-k \in (1, 2) \Rightarrow k \in (-2, -1)$

2 $-k \in (3, 4) \Rightarrow k \in (-4, -3)$

3 $-k \in (5, 6) \Rightarrow k \in (-6, -5)$

При найденных k уравнение квадратное, корни

$-k > 0, \quad \frac{1}{2-k} > 0$

+

и они различны

Ответ $k \in (-2, -1) \cup (-4, -3) \cup (-6, -5)$

Линия отреза

Бланк ответов