ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026718123151

Титульный лист

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия МУХАМЕТДИНОВ

Имя КАМИЛЬ

Отчество РЕНАТОВИЧ

Дата рождения 30 05 2008

Город участия УФА

Аудитория 8АКТ

Дата 02 02 2026

Подпись Кд

Пример заполнения

АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ
ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026718123151

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс
- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Город участия УФА

Заполняется организаторами

Количество доп листов 0 Количество черновиков к проверке 3

Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	5	–	20					
Балл члена жюри №2	20	20	5	–	20					

Итоговый балл 65

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

№5 $(k-2)x^2+(k-1)^2x+k=0$

Это квадратное уравнение относительно x

Условие существования 2-х корней — $D>0$ (Если $D=0$ то корень должен входить и в A и в B, но они не имеют пересечений)

$D=((k-1)^2)^2-4k(k-2)=((k-1)^2)^2-4k^2+8k=$

$=((k-1)^2)^2-4(k-1)^2+4=((k-1)^2-2)^2>0$

Тогда $(k-1)^2-2\neq0$, $(k-1)^2\neq2$, $k-1\neq\pm\sqrt{2}$, $k\neq\pm\sqrt{2}+1$

$$x_1=\frac{-(k-1)-|(k-1)^2-2|}{2k-4}$$

$$x_2=\frac{-(k-1)^2+|(k-1)^2-2|}{2k-4}$$

1) при $(k-1)^2-2>0$, $k^2-2k+1-2>0$, $k^2-2k-1>0$

$(k-(1-\sqrt{2}))(k-(1+\sqrt{2}))>0$

$k\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$ $(*_1)$

$$x_1=\frac{-k^2+2k-1-k^2+2k+1+2}{2(k-2)}=\frac{-2k^2+4k}{2(k-2)}=$$

$$=\frac{-k^2+2k}{k-2}=\frac{k(2-k)}{k-2}=-k \quad V$$

$$x_2=\frac{-k^2+2k-1+k^2-2k+1-2}{2(k-2)}=\frac{-2}{2(k-2)}=\frac{1}{2-k} \quad V$$

$x_1\in A$ и $x_2\in B$ или $x_1\in B$ и $x_2\in A$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-k\in(0;1)\cup(2\ 3)\cup(4\ 5) & (2)\\ \frac{1}{2-k}\in(1,2)\cup(3;4)\cup(5,6) & (1)\end{cases}\\ \begin{cases}-k\in(1;2)\cup(3,4)\cup(5;6) & (3)\\ \frac{1}{2-k}\in(0,1)\cup(2;3)\cup(4;5) & (4)\end{cases}\end{array}\right.\\ k\in(-\infty\ 1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2};+\infty)\end{cases}$$

$-1<1-\sqrt{2}<0$

(2) $k \in (-5,-4) \cup (-3,-2) \cup (-1,0)$

(1) Заметим, что во всех возможных интервалах $\frac{1}{2-k} > 1$

Это возможно только при

$\frac{1-2+k}{2-k} > 0$, $\frac{(k-1)}{(k-2)} < 0$, $k \in (1,2)$, но эти значения k не входят в (2) Тогда эта система не имеет решений

(3) $k \in (-6,-5) \cup (-4,-3) \cup (-2,-1)$

(4) Аналогично, во всех интервалах кроме $(0,1)$

$\frac{1}{2-k} > 2$ Тогда $k \in (\frac{3}{2}, 2)$ Противоречие с (3)

Осталось рассмотреть $\frac{1}{2-k} \in (0,1)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2-k} > 0 \\ \frac{1}{2-k} < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k < 2 \\ \left[\begin{array}{l} k > 2 \\ k < 1 \end{array}\right. \end{cases}, \quad k \in (-\infty, 1)$$

Тогда система ((3) и (4)) имеет решение $k \in (-6,-5) \cup$ области $\cup (-4,-3) \cup (-2,-1)$ Очевидно что они удовлетворяют $(*_1)$

2) при $(k-1)^2 - 2 < 0$, $k \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ $(*_2)$

$x_1 = \frac{1}{2-k}$, $x_2 = -k$

Случай аналогичен 1-му случаю, однако $(*_2)$ и найденное значения k не имеют пересечений

Ответ $k \in (-6,-5) \cup (-4,-3) \cup (-2,-1)$ +

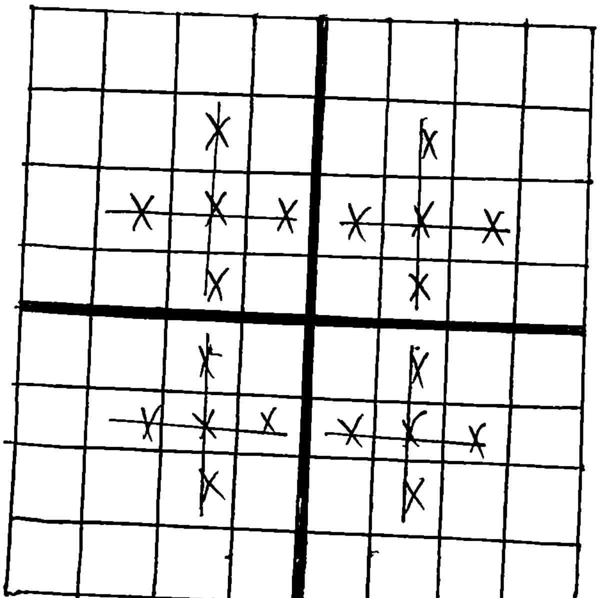
№3 Докажем что вырезав < 4 крестов, не получится достигнуть того, чтобы нельзя было вырезать ещё один крест

Разделим поле на 4 области 4×4 (квадраты в углах поля 8×8) как на рисунке (см след страницу)

Линия отреза

Бланк ответов

поставить = вырезать



v пример

В каждой области ~~...~~ можно поставить крест 4-мя способами. Заметим, что если поставить в 1 область 1 крест то в неё поставить второй уже не получится. Значит, чтобы нельзя было вырезать еще 1 крест, то из каждой области нужно вырезать хотя бы 1 крест

Тем чтобы он не выходил за пределы

~~[illegible]~~

Тогда нужно вырезать хотя бы 4 креста (оценка)

Пример для 4 крестов представлен на рисунке
(+ - крест)

Ответ 4 креста

а если крест будет выходить за пределы области 4x4?

№2 Ответ Дима

Выигрышная стратегия Димы

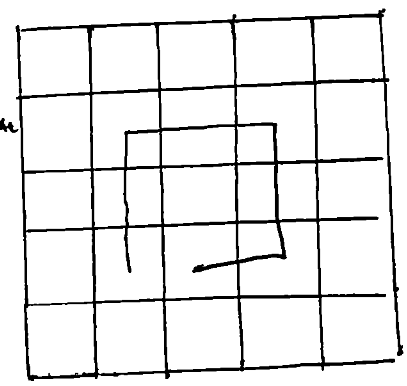
1) Первым ходом он рисует змейку вокруг центральной клетки (1013 1013) Тем самым он занимает 9 центральных клеток

2) Следующими ходами Дима ходит симметрично Максиму относительно центра

Дима всегда может сделать ход, если Максим смог т.к. поле симметрично относительно центра. И если на одной ~~...~~ стороне от центра свободны какие-то клетки, то на другой стороне (симметрично центру) тоже свободны эти клетки

Длина змейки — 8 клеток, поэтому даже если Максим попробует занять центральные клетки (которые соседние со змейкой, нарисованной Димой первым ходом), то Дима сможет сделать ход т.к. симметрично центру останется еще 8 клеток. На рисунке изображен центр поля (клетки, расположенные на пересечении 1011 – 1015 столбцов и 1011 – 1015 строк)

— змейка Димы при первом ходе
Остается 16 свободных клеток, каждым 8 соседним которым имеются 8 соседних симметрично центру



+

№1 $f(11)=1$ $\qquad$ $f(x)$ — цифра

$f(22)=2$

$f(99)=9$

При $a=1$, $b=2$, $c=1$

$f(12)\ f(21)\ \underset{=1}{f(11)} = 1\cdot2\cdot1\cdot2$

$f(12)\ f(21)=2$ Тогда один из множителей равен 1, другой — 2

Аналогично, для $a=c=2$; $b=3$

$f(23)\ f(32)\ \underset{=2}{f(22)}=12$

$f(23)\ f(32)=6$ Один из множителей — 2, другой — 3

Покажем в общем виде при $a=c$

$f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca}) = f(\overline{ab})\ f(\overline{ba})\ \overbrace{f(\overline{aa})}^{=a} =$

$= f(\overline{ab})\ f(\overline{ba})\ a = a^2 b$

$f(\overline{ab})\ f(\overline{ba}) = ab$

~~Тогда одно из чисел вида $\overline{ab}$ = $\overline{ba}$~~

Бланк ответов

Тогда одно из $f(\overline{ab})$ и $f(\overline{ba})$ равно a, другое b

Разделим все числа (кроме 11, 22 ... 99) на пары

$(12, 21) = 1+2$ $(23, 32) = 2+3$

$(13\ 31)\ 1+3$ $(24, 42)\ 2+4$ $(78\ 87) = 7+8$

$--$ $(79, 97) = 7+9$

$(19\ 91) = 1+9$ $(29, 92) = 2+9$ $(89\ 98) = 8+9$

В суммах каждая цифра всего встречается по 8 раз

$f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) = a+b$, поэтому

$f(11) + f(12) + \ldots + f(19) + f(21) + \ldots + f(25) + \ldots + f(91) + \ldots + f(99) = 1+2+3+\ldots+9+8\cdot1+8\cdot2+8\cdot3+\ldots 8\cdot9 =$

$= 9(1+2+3+\ldots+9) = 9\cdot\left(\frac{1+9}{2}\cdot9\right) = 9\cdot45 = 405$

+