ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101393251420

Титульный лист

Направление
- ☐ анализ данных
- ☐ информатика
- ☐ история
- ■ математика
- ☐ обществознание
- ☐ русский язык
- ☐ физика
- ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия ЗАВРАЖНОВ

Имя ВЛАДИМИР

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 07 04 2008

Город участия КРАСНОЯРСК

Аудитория 315

Дата 02 02 2026 **Подпись**

Пример заполнения
АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ
ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101393251420

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Город участия КРАСНОЯРСК

Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	0	20	20	–	20					
Балл члена жюри №2	0	20	20	–	20					

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 2

Ответ Побеждает Дима

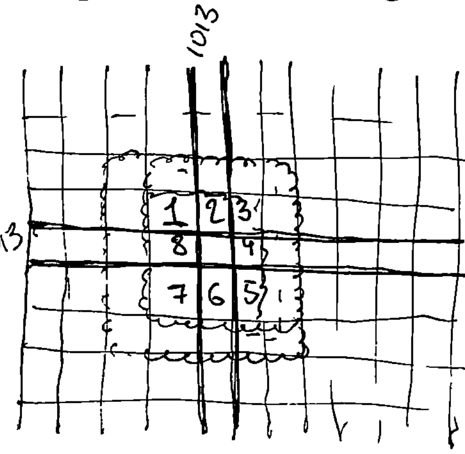
Доказательство Предъявим выигрышную стратегию

Занумеруем каждую строчку и столбец ~~поля~~ поля. Точкой (a, b) назовем точку стоящую в a-строчке и b-столбце

Первым ходом Дима рисует змейку

$(1012,1012) \to (1012,1013) \to (1012,1014) \to (1013,1014) \to (1014,1014) \to (1014,1013) \to (1014,1012) \to (1013,1012)$

(см рисунок)



Теперь любым ходом из клеток вида $Q=(1013+k, 1013+t)$ и $P=(1013-k, 1013-t)$ можно замкнуть не больше одной; $|k|, |t| > 1$

Доказательство Клетки с координатами 1012 – 1014 замкнуты

Точки $(1013+k, 1013+t)$ и $(1013-k; 1013-t)$ обладают центральной осевой симметрией относительно $(1013, 1013)$ (поле нечетное – есть центр)

Расстояния между такими точками не меньше, чем половина длины круговой оси клеток

Минимальная такая ось – клетки (m, n), $m, n \in \mathbb{Z}\,[1011, 1015]$ исключая 9 клеток по центру, уже замкнутых

Длина этого пути – 18 $\Rightarrow$ если змейка замыкает 2 из клеток Q и P, то ее длина > 8 – противоречие

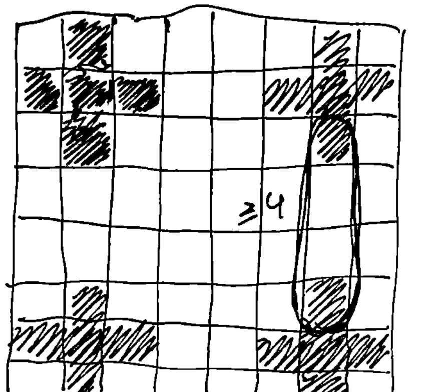
Значит Дима всегда может замкнуть змейкой клетки P, P_{i+1}, P_{i+7}, когда Максим замкнул Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+7}

При том важно два факта
Поскольку змейка Максима недействительна, т.е удовлетворяет условию, то и змейка Димы будет удовлетворять условию, ведь в силу описанной центральной симметрии змейка Димы, при повороте поля на 180° перейдет в змейку, нарисованную Максимом в его последний ход
Более того, как после первого, так и после любого хода Димы из 4 клеток Q' и P' с одинаковыми координатами занято либо две, либо ни одной, т.к ходы Димы симметричны на это обозначение
$\Rightarrow$ У Димы всегда найдется ход змейкой
$P_i, P_{i+1} \; P_{i+7}$ после хода Максима $Q_i, \; Q_{i+7}$
(Клетки Q_i и Q могут очевидно быть любыми, которые может содержать одна змейка)
Но клетки доски конечны, каждый ход уменьшает количество свободных на 8, но Дима по указанной причине игра закончиться не может
$\longrightarrow$ Проиграет Максим
Стратегия симметрии
Ответ Дима

Бланк ответов

Задание 3

Ответ 4

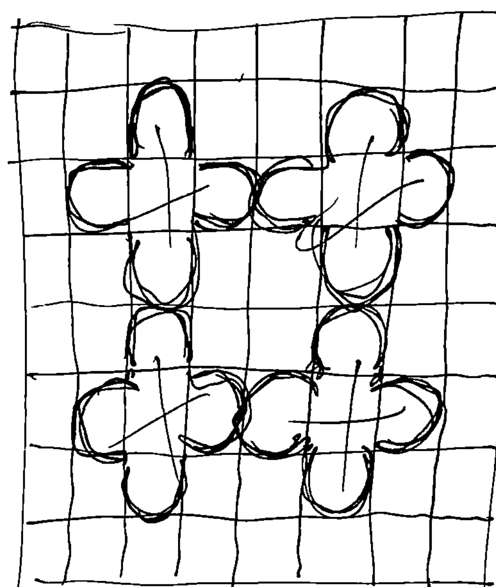


Оценка Рассмотрим закрашенные клетки (см ~~рисунок~~ рисунок) Они образуют 4 „креста" Очевидно, что вырезав из доски абсолютно любой крест, невозможно сделать это, вырезав клетки у хотя бы двух закрашенных крестов за раз. Расстояние между любыми клетками из разных крестов, как видно на рисунке, ≥4 Но одним вырезом из одного столбца или строчки мы вырежем ≤3 клеток

Значит если было сделано ≤3 вырезов, то хотя бы один из закрашенных крестов еще можно вырезать → условие не выполнено

Пример

Несложно убедиться, что на приведенном ~~рисунке~~ рисунке невозможно вырезать никакой крест, помимо 4-х обведенных



Ответ 4

Задание 1

$$f(\overline{ab}) + f(\overline{bc}) + f(\overline{ca}) = abc$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{I} \quad f(\overline{ab}) = a \Rightarrow f(\overline{bc}) = b, \ f(\overline{ca}) = c \\ \text{II} \quad f(\overline{ab}) = b \Rightarrow f(\overline{bc}) = c, \ f(\overline{ca}) = a \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Инвариант $f(\overline{ab}) + f(\overline{bc}) + f(\overline{ca}) = a + b + c$

Бланк ответов

Задание 5 $A=(0,1)\cup(2,3)\cup(4,5)$
$B=(1,2)\cup(3,4)\cup(5,6)$

$(k-2)x^2+(k-1)^2+k=0$ $x_1\in A$, $x_2\in B$

Очевидно при $k=2$ уравнение линейно, но $A\cap B=\varnothing$
$\Rightarrow k=2$ не подходит. Далее будем считать $k\neq 2$

Тогда по т Виетта $\begin{cases} x_1+x_2=-\left(\frac{k^2-2k+1}{k-2}\right) \\ x_1x_2=\frac{k}{k-2}\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\left(k+\frac{1}{k-2}\right) \\ x_1x_2=k\cdot\frac{1}{k-2}\end{cases}$

$\Rightarrow$ Корни уравнения имеют вид $-k$, $-\frac{1}{k-2}$ +

Рассмотрим 2 случая

(I) $-k=x_1\in A$

1) $k\in(-1,0)\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{k-2}\in\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$
$\Rightarrow -\frac{1}{k-2}\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$
$\notin B$ – не удовл

Функция $-\frac{1}{k-2}=y$ не имеет разрывов на $(k>2$ и $k<2\Rightarrow$ область значений будет определяться по границам области значений k, не пересекающей $k=2$
На этих участках по отдельности гипербола либо строго убывает, либо строго возрастает

2) $k\in(-3,-2)\Rightarrow x_1\in(2,3)$
$-\frac{1}{k-2}\in\left(\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right)\notin B$ – не удовлетворяет

3) $k\in(-5,-4)\to x_1\in(4,5)$
$-\frac{1}{k-2}\in\left(\frac{1}{7},\frac{1}{6}\right)\notin B$ – не удовлетворяет

(II) $-k = x_2 \in B$

1) $-k \in (-2,-1) \Rightarrow -\frac{1}{k-2} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \in A \Rightarrow$ все $k \in (-2,-1)$ удовлетворяют

2) $-k \in (-4,-3) \Rightarrow -\frac{1}{k-2} \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right) \in A \Rightarrow$ все $k \in (-4,-3)$ — удовлетворяют

3) $-k \in (-6,-5) \Rightarrow -\frac{1}{k-2} \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{7}\right) \in A$ $k \in (-6,-5)$ — удовл

Остальные k не подходят, поскольку $-k$ — один из корней $\Rightarrow$ из всех возможных значений подходят только те, которые принадлежат одному из множеств A и B. Для них необходимо проверить лишь соответствие второго корня условию.

Как было написано выше ~~~~ ~~~~, $k > 2$ не удовлетворяют, т.к. $-k \notin (A \cup B) \Rightarrow k < 2$. На этой области гиперболу $y = -\frac{1}{k-2}$ можно рассматривать монотонно возрастающую функцию без локального максимума, поэтому для k значение $-\frac{1}{k-2}$ можно определить по границам значений k

Ответ $k \in (-6,-5) \cup (-4,-3) \cup (-2,-1)$

+