ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101820239114

Титульный лист

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Фамилия	ЧЕЛЫШКИНА
Имя	АНАСТАСИЯ
Отчество	ПАВЛОВНА
Дата рождения	13 06 2008
Город участия	КРАСНОЯРСК
Аудитория	3-18

Дата 02 02 2026 **Подпись**

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101820239114

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Город участия КРАСНОЯРСК

Заполняется организаторами

Количество доп листов 01 Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	5	–	20					
Балл члена жюри №2	20	0	5	–	20					

Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

№1

1) т к в сумме которую надо найти между $f(19)$ и $f(21)$ не стоит $f(20)$, я приму что в этой сумме также нету $f(30), f(40), \ldots, f(90)$

2) т к. для любого двуз числа её значение равно одной из её цифр, то для $f(11), f(22) \ldots f(99)$ - оно всегда будет точным (т.к $1=1$, $2=2$ и т.д), т.е эту сумму можно сразу сосчитать.

$f(11)+f(22)+\ldots+f(99)=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

3) Обратимся ко второму равенству из условия:

$f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bc}) f(\overline{ca})=abc$, допустим, $a=b$, тогда:

$f(\overline{aa})\ f(\overline{ac})\ f(\overline{ca})=a^2c$, из 2 пунктов $f(\overline{aa})=a$ и из того что $a\neq0$ (по условию) можно сократить и тогда выйдет.

$f(\overline{ac})\ f(\overline{ca})=a\,c$, т к значение ф-ции в двузначном числе равно одной из цифр этого числа, логично составить совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(\overline{ac})=a\\ f(\overline{ca})=c\end{cases}\\ \begin{cases}f(\overline{ac})=c\\ f(\overline{ca})=a\end{cases}\end{array}\right.$$

, но если каждую из систем просуммировать, то выходит: $f(\overline{ac})+f(\overline{ca})=a+c$ - верная для любых ненулевых цифр, в таком случае мы можем найти данную нам сумму

Например $f(\overline{12})+f(\overline{21})=1+2=3$

№1 (продолжение)

4) Можно немного упростить счет заметив некоторую последовательность

а) $(f(12)+f(13)+\ldots+f(19))+(f(21)+f(31)+\ldots+f(91))=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{8\text{ знач}}+$

$\underbrace{f(12)+f(13)+\ldots+f(19)}_{8\text{ знач}}$, $\underbrace{f(21)+f(31)+\ldots+f(91)}_{8\text{ знач}}$

$+f(\underbrace{2+3+\ldots+9}_{8\text{ знач}})=8\cdot1+(2+3+\ldots+9)=8+44=52$

б) $(\underbrace{f(23)+f(24)+\ldots+f(29)}_{7\text{ знач}})+(f(32)+f(42)+\ldots+f(92))=\underbrace{2+2+\ldots+2}_{7\text{ знач}}+$

$f(3+4+5\ldots+9)=2\cdot7+(3+4+\ldots+9)=14+42=56$

* $f(21)$ - не включаем, т.к. она уже была в а)

Дальше я могу записывать остальные сразу в таком виде

в) $(f(34)+f(35)+\ldots+f(39))+(f(43)+f(53)+\ldots+f(93))=3\cdot6+(4+5+\ldots+9)=$
$=18+39=57$

г) $(f(45)+f(46)+\ldots+f(49))+(f(54)+f(64)+\ldots+f(94))=4\cdot5+(5+\ldots+9)=20+35=55$

д) $(f(56)+f(57)+\ldots+f(59))+(f(65)+f(75)+\ldots+f(95))=5\cdot4+(6+\ldots+9)=20+30=50$

е) $(f(67)+f(68)+f(69))+(f(76)+f(78)+f(79))=6\cdot3+(7+8+9)=18+24=42$

ж) $(f(78)+f(79))+(f(87)+f(97))=7\cdot2+(8+9)=14+17=31$

з) $f(89)+f(98)=8\cdot1+9=17$

Во всех вышеперечисленных буквенных пунктах в сумме не было $f(11)$, $f(22)$ и т.д. т.к. я уже посчитала их сумму в пункте 1

5) Просуммируем все найденные значения (не забываем про пункт 1):

$45+52+56+57+55+50+42+31+17=100+50+150+105=405$

105, 100, 150

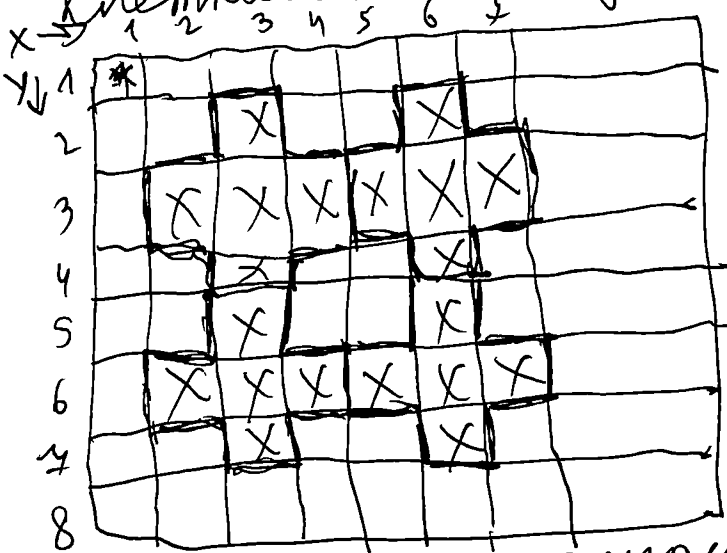
Ответ 405

Линия отреза

Бланк ответов

№3

Рассмотрим квадрат 8×8 с пронумерованными клетками



, пример * клетки я буду рассматривать по координатам, в клетке 11 стоит * для примера (так, ее не вырезали)

Попробуем начать с левого верхнего угла. Если вырезать крест, у которого обе координаты будут больше 3, то из квадрата с координатами углов 11, 13, 33, 31 придется вырезать пятиугольник, что не очень рационально, ведь так будет для каждого угла (возможно кроме одного), но все равно вырезанных пятиугольников будет больше 4, значит надо чтобы пятиугольник закрывал хотя бы часть этого квадрата 3×3. Если вырезанный пятиугольник будет ~~закрывать~~ забирать только клетку 33, то оттуда все равно можно будет вырезать пятиугольник, значит нужно вырезать пятиугольник включающий координаты 23, 32, 33 (X — вырезанная клетка), и так мы делаем для каждого угла. Можно заметить, что всегде не осталось пятиугольника, значит ответ задачи это 4

Ответ 4   Описание конкр. нет примера   + 2

№5

Можно заметить, что $A \cap B = \emptyset$, значит x_1 и x_2 — различные числа, т.е. ур-е $(k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = 0$ должно иметь два решения, т.е. должны выполняться два пункта:

1) старший коэф. не равен 0 (в противном случае решений будет не больше 1)

2) дискриминант должен быть больше 0 (чтобы было 2 различных решения)

По 1 пункту все просто, $k - 2 \neq 0$ $k \neq 2$

Пусть $t = k - 1$, тогда

$$(t-1)x^2 + t^2 x + t + 1 = 0$$

$D = t^4 - 4(t-1)(t+1) = t^4 - 4t^2 + 4 = (t^2-2)^2$, должно быть больше нуля, но т.к. $(t^2-2)^2$ - квадрат, то оно больше нуля при всех значениях кроме $t^2 = 2$, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} t \neq \sqrt{2} \\ t \neq -\sqrt{2} \end{array}\right. \quad \text{обр. замена} \quad \left[\begin{array}{l} k \neq \sqrt{2}+1 \\ k \neq -\sqrt{2}+1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-t^2 + t^2 - 2}{2t-2} = \dfrac{-1}{t-1} \\ x_2 = \dfrac{-t^2 - t^2 + 2}{2t-2} = \dfrac{-(t^2-1)}{t-1} = \dfrac{-(t-1)(t+1)}{(t-1)} = -t-1 \end{array}\right.$$

обратная замена

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1}{k-2} \quad \checkmark \\ x_2 = -k \end{array}\right.$$

~~Допустим, $x_1 \in A$, $x_2 \in B$~~ И x_1 и x_2 (независимо от того, к какому множеству принадлежат) значит составим систему

Линия отреза

Бланк ответов

№5 (продолжение)

$\begin{cases} \frac{-1}{k-2} > 0 \\ -k > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{k-2} < 0 \\ k < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k-2 < 0 \\ k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow k < 0$ ✓

3) Допустим, $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ тогда:

$\left[\begin{cases} \frac{-1}{k-2} < 1 \\ 2 < \frac{-1}{k-2} < 3 \\ 4 < \frac{-1}{k-2} < 5 \end{cases}\right.$

$k \in (-6, -5) \cup (-4, -3) \cup (-2; -1)$ (про то что $k \neq 2$, $k \neq \sqrt{2}+1$, $k \neq 1-\sqrt{2}$ я помню, но укажу это уже в конце решения)

$\left[\begin{cases} \frac{-1}{k-2} < 1 \quad (1) \\ \frac{-1}{k-2} > 2 \quad (2) \\ \frac{-1}{k-2} < 3 \quad (3) \\ \frac{-1}{k-2} > 4 \quad (4) \\ \frac{-1}{k-2} < 5 \quad (5) \end{cases}\right.$

$k \in (-6, -5) \cup (-4, -3) \cup (-2, -1)$

решим каждое отдельно

Решим (1)

$\frac{-1-k+2}{k-2} < 0$

$\frac{-k+3}{k-2} < 0$

$\frac{k-3}{k-2} > 0$

~~$k \in (-\infty, -3)$~~ $k \in (-\infty, 0)$

Решим (2).

$\frac{-1-2k+4}{k-2} > 0$

$\frac{2k-3}{k-2} < 0$

$k \in \varnothing$

Решим (3):

$$\frac{-1-3k+6}{k-2}<0$$

$$\frac{3k-5}{k-2}>0$$

$+ \quad - \quad +$; $0 \quad \frac{5}{3} \quad 2 \quad k$

$k\in(-\infty,0)$

Решим (4).

$$\frac{-1-4k+8}{k-2}>0$$

$$\frac{4k-7}{k-2}<0$$

$+ \quad - \quad +$; $0 \quad \frac{7}{4} \quad 2 \quad k$

$k\in\varnothing$

Решим (5)

$$\frac{-1-5k+10}{k-2}<0$$

$$\frac{5k-9}{k-2}>0$$

$+ \quad - \quad +$; $0 \quad \frac{9}{5} \quad 2 \quad k$

$k\in(-\infty,0)$

Вернемся в систему

$$\begin{cases} k\in(-\infty,0) \\ k\in(-6;-5)\cup(-4,-3)\cup(-2,-1) \\ k\neq 1-\sqrt2 \\ k\neq 1+\sqrt2 \\ k\neq 2 \end{cases}$$

$k\in(-6,-5)\cup(-4;-3)\cup(-2;-1)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{matrix} -2<-\sqrt2<-1 \\ -1<1-\sqrt2<0 \\ 1+\sqrt2>0 \\ 2>0 \end{matrix}\right)$$

4) Допустим $x_1\in B$, $x_2\in A$ тогда:

$$\begin{cases} k\in(-5;-4)\cup(-3,-2)\cup(-1,0) \\ \left[\begin{matrix} \begin{cases} \frac{-1}{k-2}<2 \ (1) \\ \frac{-1}{k-1}>1 \ (2) \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{-1}{k-2}<4 \ (3) \\ \frac{-1}{k-2}>3 \ (4) \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{-1}{k-1}<6 \ (5) \\ \frac{-1}{k-1}>5 \ (6) \end{cases} \end{matrix}\right. \end{cases}$$

Решим каждое отдельно

Решим (12)

$$\frac{-1-k+2}{k-1}>0$$

$$\frac{k-1}{k-1}<0$$

$+ \quad - \quad +$; $0 \quad 1 \quad 2 \quad k$

$k\in\varnothing$, значит система $12 \to k\in\varnothing$

Решим (34)

$$\frac{-1-3k+6}{k-2}>0$$

$$\frac{3k-5}{k-2}<0$$

$+ \quad - \quad +$; $0 \quad \frac{5}{3} \quad 2 \quad k$

$k\in\varnothing$, значит система $23 \to k\in\varnothing$

Дополнительный лист номер 1

№5 (продолжение)

Решим (б)

$$\frac{-1-9k+10}{k-2}>0$$

$$\frac{9k-9}{k-2}<0$$

$$0 \quad \frac{9}{9} \quad 2$$

$k\in\emptyset$, значит система 5б $\Rightarrow k\in\emptyset$

вернёмся в систему:

$$\begin{cases} k\in\emptyset \\ k\in(-5,-4)\cup(-3;-2)\cup(-1,0) \end{cases} \Leftrightarrow k\in\emptyset$$

5) Объединяя пункты 3 и 4 получаем

$$k\in(-6,-5)\cup(-4;-3)\cup(-2,-1)$$

Ответ. $k\in(-6,-5)\cup(-4,-3)\cup(-2;-1)$

№2

Проигрывает ~~Дим~~ Максим, если Дима будет пользоваться выигрышной стратегией т.к. клеток нечётное количество (причём $mod_8(2025\ 2025)=1$), то Диме первым ходом надо занять центральную клетку и делать стратегия неверная ходы, как делает Максим, только зеркально противоположные относительно диагонали (главной или побочной выбирать одной, но только относительно одной всю игру)

Ответ. Выигрывает Дима, независимо от игры соперника

Дополнительный лист номер 1